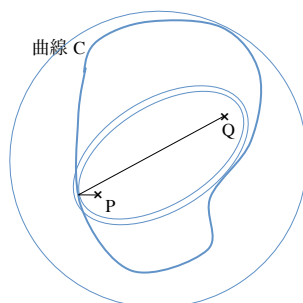


平成 29 年度 解析力学 講義ノート [2] (担当: 井元信之)

前回の演習問題の答

[問 1.1] 例題 1.1 の答は他にもある。それは何を意味するか?

答: P と Q を焦点とする楕円群の接点はみな正解である。そのうち三つだけ図示するが、たとえば一番外側のものは「P から C 上を経て Q に至る最長路」になっている。



例題 1.1 の問い方が「最短路を求めよ」でなく「P から C 上で反射して Q に至る経路」なので、最小、極小、停留、極大、最大のどれも正解となる。

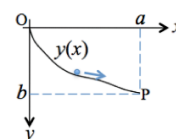
[問 1.2] 束縛条件 $x + 2y = 1$ の下に xy の最大値を求めよ。

答: $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + 2y - 1$ として, $h(x, y) \equiv f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda(x + 2y - 1)$

$$\Rightarrow \text{停留条件} \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - 2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2\lambda \\ y_0 = \lambda \end{cases}$$

これを束縛条件 $x + 2y - 1 = 0$ に代入 $\rightarrow$ 未定乗数は $\lambda = \frac{1}{4} \rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{4}$, 最大値は $\frac{1}{8}$ である。

1.2.2 最速降下線



以上 (1.6) 式から一般論を述べたが、例題に戻ると、例題 1.3 の $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ のように f が x を含まないとき、オイラー方程式は、

$$f - y' f_{y'} = \text{const.} \quad (1.12)$$

と積分される。なぜなら左辺を x で微分すると

$$f_y y' + f_{y'} y'' - y'' f_{y'} - y' (f_{y'})' = [f_y - (f_{y'})'] y' \quad (1.13)$$

となり、この (1.13) の右辺はオイラー方程式から 0 となるからである。ここで $f_{y'}$ 等は $\frac{\partial f}{\partial (y')}$ 等を意味する。例題 1.3 の場合

$$f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} \rightarrow f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y} \sqrt{1 + (y')^2}} \quad (1.14)$$

であるから、(1.12) 式は

$$\frac{1}{\sqrt{y} \sqrt{1 + (y')^2}} = c \text{ (const.)} \quad (1.15)$$

となる。いま $y' = \cot(\theta/2)$ とおくと、

$$y = \frac{1}{c^2} \frac{1}{1 + (y')^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\text{cosec}^2(\theta/2)} = \frac{1}{c^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \theta) \quad (1.16)$$

一方、

$$x = \int \frac{dx}{dy} \frac{dy}{d\theta} d\theta = \int \tan \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2c^2} \sin \theta d\theta = \frac{1}{c^2} \int \tan \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{c^2} \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2c^2} (\theta - \sin \theta) + C \quad (1.18)$$

原点からスタートする境界条件から $C = 0$ となるので、解は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2c^2} (\theta - \sin \theta) \\ y = \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (1.19)$$

となる。これは半径 $1/2c^2$ の円が x 軸を天井として接しつつ転がる サイクロイド (cycloid) の媒介変数表示に他ならない。定数 c は点 (a, b) を通る境界条件から決まる。

1.2.3 汎関数の停留問題（束縛条件あり）

[例題 1.4] 原点 O と点 P を鎖で結んだとき、鎖の形はどのような曲線になるか？

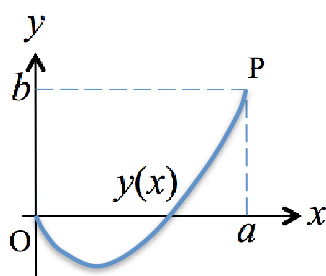


図 1.6: 例題 1.4 の図。

この曲線を懸垂線 (catenary) と呼ぶ。この問題では「鎖の全長 $= L$ (const.)」の束縛条件の下に、「鎖の各部の位置エネルギーの積分」を最小にする曲線を求める。すなわち

$$\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = L \quad (1.20)$$

の束縛条件のもとに

$$\int_O^P \rho g y ds = \rho g \int_0^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (1.21)$$

の停留条件と停留値を求める。

一般に 束縛条件 (binding condition)

$$G[y] = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = c \text{ (const.)} \quad (1.22)$$

のもとに

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1.23)$$

の停留を与える関数 $y_0(x)$ と停留値を求める問題を束縛条件付き変分問題と言う。ラグランジュの未定乗数を λ として変分関数および変分汎関数は

$$h(x, y, y', \lambda) = f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y') \quad \text{および} \quad H[y] = \int_{x_1}^{x_2} h(x, y, y', \lambda) dx = F[y] - \lambda G[y] \quad (1.24)$$

となる。 $y(x)$ が真の $y_0(x)$ から少しずれて

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (1.25)$$

になったとすると、変分汎関数 H は

$$H(\varepsilon, \lambda) = F(\varepsilon) - \lambda G(\varepsilon) \quad (1.26)$$

のように λ をパラメーターとする ε の関数となり、その停留条件 $(dH/d\varepsilon) = 0$ からオイラー方程式

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial h}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.27)$$

が導かれる。これを解いて得られる $y_0(x)$ はまだパラメーターとして λ が含まれているので、それを束縛条件 (1.22) 式に入れば λ が決まり、 $y_0(x)$ も決まる。

以上の一般論を例題 1.4 に適用してみよう。この問題も最小値そのものよりは鎖の形 $y_0(x)$ のみを知りたいので、(1.21) 式の ρg は省略して、

$$h(x, y, y', \lambda) = y \sqrt{1 + (y')^2} - \lambda \sqrt{1 + (y')^2} \quad (1.28)$$

となり、オイラー方程式は

$$(y')^2 - (y - \lambda)y'' = 0 \quad (1.29)$$

となる。その解を双曲線関数に求めることとして

$$y(x) = \alpha \cosh(\beta x) + \gamma \quad (1.30)$$

とおいて、これを (1.29) 式に代入すると

$$(\lambda - \gamma)\alpha\beta^2 \cosh(\beta x) = 0 \quad (1.31)$$

を得るので、まず $\gamma = \lambda$ を得る。そうして得られた $y(x) = \alpha \cosh(\beta x) + \lambda$ を束縛条件 (1.20) 式に代入し、それと境界条件 $y(0) = 0$ および $y(a) = b$ の三元連立方程式から λ と α と β が決まる。その手続きは省略する。(数値計算が必要となる。) このようにして、懸垂線は $\cosh$ 関数であることが示される⁴。

⁴ この問題の場合、変分法によらず鎖の微小要素に働く力の釣り合いを考えても解くことは可能である。

[問 1.3] 周長一定の滑らかな閉曲線で面積が最大のものは何か? [ヒント: 曲線を $x(t)$, $y(t)$ (ただし t は 0 から T を動く) と媒介変数表示すると、滑らかな閉曲線であることは境界条件 $x(0) = x(T)$, $y(0) = y(T)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(T)$, $\dot{y}(0) = \dot{y}(T)$ で、周長一定条件は $\int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = L$ で与えられる。また原点から引いた線分が dt の間に掃く面積は $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})dt$ である。]

1.2.4 関数がいくつもある場合、その他

関数が y だけでなく複数あつて $\vec{y}$ である場合に拡張しておこう。 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ のことをひとまとめに $\vec{y}$ と書いているのである。境界条件は x の両端で関数は固定、すなわち

$$\begin{aligned} x = x_1 \text{ にて } y_1(x_1) = a_1, \quad y_2(x_1) = a_2, \quad \dots, \quad y_n(x_1) = a_n \\ x = x_2 \text{ にて } y_1(x_2) = b_1, \quad y_2(x_2) = b_2, \quad \dots, \quad y_n(x_2) = b_n \end{aligned} \quad (1.32)$$

である。汎関数が

$$F[\vec{y}] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \dots, y_n, y_n') dx \quad (1.33)$$

のとき、これが停留するためには、いままでの議論と同様、オイラー方程式として

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_2'} \right) &= 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_n'} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

なる連立微分方程式が導かれる。特に解析力学では時間 t の関数として座標 x, y, z があり、かつ多粒子の場合もあるので、関数がいくつもある場合に相当する。上記は束縛条件のない場合であるが、束縛条件がある場合への拡張は書き下すまでもないだろう。各自書いてみよう。

以上、解析力学に必要な変分法の基本を解説した。この講義ではこれ以上変分法それ自体を深める議論はしないが、変分法自体のその先の話には次のようなものがあることだけ触れておこう。

- ・独立変数が x だけでなく $\vec{x}$ の場合。
- ・境界条件が一つだけ (たとえば $y(0) = 0$ だけ) で $y(a)$ については停留条件から自動的に決まる場合。
- ・境界条件が「ある点から曲線 A 上のどこか一点に至る関数」のような指定のされ方の場合。
- ・変分関数 f や束縛条件の関数 g が、 y と y' だけでなく高階導関数を含む場合。
- ・適当な候補関数 (trial function) の範囲で最も良い近似解となるものを求める方法。

特に最後のものは重要で、複雑な真の解より本質を突く「近似モデル」の方が重要な場合が多い。単に変分法と言った場合、これを想像する変分法のユーザーも多いであろう。たとえば分子や結晶内の電子の波動関数を求めようとしてもシュレーディンガー方程式が解析的に解けない場合、既にわかっている原子内の電子の波動関数の一次結合として分子や結晶内の波動関数を近似的に表し、その範囲で一次結合係数を変分法を用いて決めて行くなどのことは頻繁に行われ、物質の成り立ちの理解に欠かせない方法となっている。

第2章 ラグランジュ形式の力学 — 基礎編 —

前章では汎関数の停留問題からオイラー方程式を導く変分法を説明し、ラグランジュの運動方程式とはラグランジアン の時間積分を汎関数とする変分問題のオイラー方程式のことであると予告した。この章ではそのことを導出し、それが座標変換や束縛条件のある問題のときに便利になることを述べ、使い方に習熟する。

2.1 保存力下でのラグランジュの運動方程式

ラグランジュの運動方程式を導く変分関数をラグランジアンと呼ぶが、その導出のために、仮想仕事の原理、その動力学バージョンであるダランベールの原理、それを変分法に適した形で表したハミルトンの原理について述べる。

2.1.1 仮想仕事の原理

[例題 2.1] 質量の等しい二つの星の中心に小さな物体が静止しており、それぞれの星からの引力が釣り合っている。この物体が一方の星の方向に無限小 δx だけ動いたとき、二つの星の引力場が物体に対してした仕事 δW は δx の何乗に比例するか?

これは両側の星からの引力による位置エネルギー (potential) の変化を計算すればよい。それを δW とすると

$$\delta W = GMm \cdot \left[\frac{\delta x}{(a + \delta x)^2} + \frac{-\delta x}{(a - \delta x)^2} \right] = GMm \cdot \left[\frac{-4a(\delta x)^2}{(a + \delta x)^2(a - \delta x)^2} \right] \simeq -\frac{4GMm}{a^3} \cdot (\delta x)^2 \quad (2.1)$$

ただし G は万有引力定数、 M は星の質量 (二つの星は等しい)、 m は質点の質量、そして質点は原点にあり星は $\pm a$ の地点にあるとする。状況を図に描くことを勧める。 δx が無限小のとき最後の $\simeq$ は $=$ となるので、答は $-(\delta x)^2$ に比例、つまり δx に比例する項はなく、二乗に比例する。

[例題 2.2] 三点 P、Q、R からの距離の和が最小となる点 O について考える。(図 2.1 左) このとき線分 OP、OQ、OR は互いに 120 度の角度をなすことを次のように見る。鉛直に立てた壁に P、Q、R があるとし、それぞれの位置に釘を取り付け、結び目 O から放射状に延びた 3 本の糸の先に質量の等しい三つの錘 (おもり) をそれぞれ結び、一本ずつ釘に架ける。(図 2.1 右) 糸に対する釘の摩擦は小さいとすると、三つの錘の平均位置が最下となるよう釣り合って静止する。すなわち $OP + OQ + OR$ は最小となる。いま OP、OQ、OR が互いに 120 度をなす点を考え、その点から点 O が無限小の δy だけ鉛直上方に動いたとき、重力場が三つの錘の系にした仕事 δW は δy の何乗に比例するか?

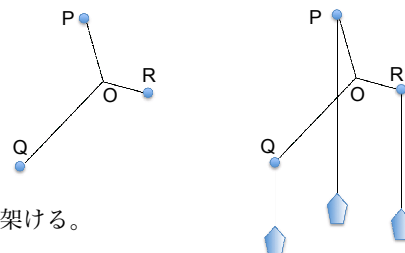


図 2.1: 左:[例題 2.2] の図。右:滑車に錘を架ける。

答だけいうと、 δy に比例する項は無く、二乗に比例する。またこのときの比例係数は、例題 2.1 と違って、正である (脚注参照)。ずらす方向は鉛直上方に限らず、1 次のずれに比例する項がないことは同じである。

例題 2.1 と例題 2.2 の共通点は「釣り合った静止位置から無限小だけずらしたとき、系に対して外場がした仕事 δW はずれに比例する項を持たず、その二乗以上の高次項となる」である。このことを

$$\delta W = 0 \quad (2.2)$$

と書く。あるいは、 N 個の質点それぞれに働く力 $\mathbf{F}_i$ (applied force) とその仮想変位 $\delta \mathbf{r}_i$ (virtual displacement) にわけて

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad i(= 1, 2, \dots, N) \text{ は質点の番号。} \quad (2.3)$$

と書ける。(2.2) 式および (2.3) 式を 仮想仕事の原理 (principle of virtual work または virtual work principle) と呼ぶ。なぜ「仮想」かということ、実際にずらすわけではなく仮想的にずらしたと想定しているからである¹。

¹しかし何らかの原因が一時的に働き、微少量ずれる場合もあり得る。例題 2.1 の例では何らかの原因で δx ずれた場合 δW が $-(\delta x)^2$ となるので、左右どちらにずれても系のエネルギーが低くなるので、より大きくずれる方向へ行く。すなわち不安定な釣り合いである。例題 2.2 は安定な釣り合いであり、何らかの原因でずれても釣り合いの地点に戻ろうとする。

2.1.2 ダランベールの原理

(2.3) 式の $\mathbf{F}_i$ は質点 i に働くべく設定された外力 (applied force: 重力、電場、磁場など) だけとは限らない。振り子、レール上を動く質点、金属の薄い曲面上を動く荷電粒子、剛体のように相対位置関係が指定された一群の質点など、束縛条件のある状況では、問題を解いてはじめて (質点の立場からすれば運動してみてもはじめて) 明らかとなる 束縛力 (constraint force) が働く。これを $\mathbf{f}$ とすると、それぞれの質点 i に対するニュートンの運動方程式は

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (2.4)$$

となるが、これを

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i + (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = 0 \quad (2.5)$$

のように移項し、三種の力が打ち消し合っているとみなす。ただし静力学での釣り合いと異なり、時間とともに変化する三つの量が各時刻 t ごとに釣り合っていると考える必要がある。釣り合いの条件から仮想仕事の原理を導いた前節の議論を使うと、

$$\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.6)$$

という「仮想仕事の原理の動力学バージョン」が得られる。

ここで注意すべきは、束縛条件があるので、 $\delta \mathbf{r}_i$ は束縛条件を満足する範囲の自由度でしか動かせないことである。特に曲線上に束縛された質点の場合、軌跡はその曲線以外にあり得ないから、可能な仮想変位は各点での通過時刻を変えるという形をとる。束縛条件が2次元曲面なら経路そのものをずらす仮想変位も可能である。空間的に同一の経路で通過時刻を変位させることもあり得る。

いましばらく、曲線か曲面かにかかわらず、摩擦のない滑らかな束縛としよう²。この場合束縛力 $\mathbf{f}_i$ は束縛された変位 $\delta \mathbf{r}_i$ とは垂直であるから、 $\mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ である。(全ての i に対して、また各時刻において) したがって (2.6) 式の Σ 内の第二項は 0 となり、

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.7)$$

となる。このように、仮想変位 $\delta \mathbf{r}_i$ さえ束縛条件を満たす方向に限定しておけば、束縛力は計算の過程から外れる。ラグランジュの運動方程式を使うと束縛条件が扱いやすくなる理由は、もとをただせばここにある。(2.7) 式を ダランベールの原理 (d'Alembert's principle) と呼ぶ。もちろんこれが任意の $\delta \mathbf{r}$ に対して成立するのは、実際の運動として実現される真の $\mathbf{r}^0(t)$ に対してだけだから、そのことを強調するために (2.7) 式を

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^0) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.8)$$

のように書くこともある。ここの $\mathbf{F}_i$ はもちろん束縛力を含まない外力 (applied force) である。これは次節のハミルトンの原理で用いられる。

²摩擦のある場合は後日触れる。

2.1.3 ハミルトンの原理

時刻 t_1 での質点の位置 $\mathbf{r}_1$ と速度 $\dot{\mathbf{r}}_1$ という二つの初期条件を決めれば以後の運動はニュートンの運動方程式に従って決まるというのがこれまで慣れた力学の状況であろう。しかし解析力学では

- 時刻 t_1 で位置 $\mathbf{r}_1$ にいた質点が時刻 t_2 に位置 $\mathbf{r}_2$ に至ったとする。そのような時空上の経路 $\mathbf{r}(t)$ として可能な全ての中で、ある汎関数を最小にする経路 $\mathbf{r}^0(t)$ が、真に選ばれる運動である

という考え方をする。すなわち位置と速度の初期条件を設定する代わりに初期時刻と終時刻の二カ所における位置を設定する。そのような汎関数は何であるかを考えるため、まず「各時刻の運動エネルギー T を経路 $\mathbf{r}(t)$ に沿って t_1 から t_2 まで積分した量 I 」という汎関数を考える。粒子が N 個あるとして番号 i を振ると

$$I[\mathbf{r}(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} T dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i(t)|^2 dt \quad (2.9)$$

である³。経路 $\mathbf{r}_i(t)$ は時間 t を媒介変数とする $3N$ 次元空間内の曲線となり、その曲線上を時間 t とともにどうたどるかが N 個の質点の運動を表す。時間軸まで独立の軸にとって N 個の質点の運動の全貌を一つの曲線で表すとすれば、それは $3N + 1$ 次元空間内の曲線となる。質点の運動として真に選ばれる経路を $\mathbf{r}_i^0(t)$ とする。そしてそれからずれた

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i^0(t) + \delta \mathbf{r}_i(t) \quad (2.10)$$

という経路を仮想的に考えよう。すると (2.9) 式の値もずれるのでそれを変分 $\delta I[\mathbf{r}(t)]$ で表すと、

³これに 2 を掛けたものは作用積分と呼ばれる。ただし (2.9) 式で T の代わりに後出のラグランジアン L としたものを作用積分と呼ぶこともある。

$$\begin{aligned}
\delta I[\mathbf{r}(t)] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \left[|\dot{\mathbf{r}}_i^0 + \delta \dot{\mathbf{r}}_i|^2 - |\dot{\mathbf{r}}_i^0|^2 \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \left[2\dot{\mathbf{r}}_i^0 \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i + |\delta \dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^0 \cdot \left(\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_i \right) dt \\
&= \left[\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^0 \cdot \delta \mathbf{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^0 \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^0 \cdot \delta \mathbf{r}_i dt \quad (2.11)
\end{aligned}$$

となる。ただし2行目最後の等式では $\delta \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}$ を用い⁴、無限小の二乗 $|\delta \dot{\mathbf{r}}|^2$ は無視した。2行目から3行目にかけて部分積分を用い、最後の等式は $\delta \mathbf{r}_i(t_1) = \delta \mathbf{r}_i(t_2) = 0$ を用いた。

ダランベールの原理を使うと、(2.11) 式最右辺は $-\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i dt$ と書けるので、(2.11) 式は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i dt \quad (2.12)$$

あるいは移項して

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = 0 \quad (2.13)$$

となる。これを ハミルトンの原理 (Hamilton's principle) と呼ぶ⁵。

⁴ $\mathbf{r}$ の変分の時間微分と $\dot{\mathbf{r}}$ の変分が一致するのは自明ではない。曲線 $\mathbf{r}^0$ から少しずらした曲線とただだけでは、時刻もずらしているかもしれないからである。そのような例は後日モーペルテュイ (Maupertuis) の原理を参照。しかし今は (2.10) 式のように、 $3N+1$ 次元内で t 軸に垂直な方向にずらしているの、 $\delta \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}$ が成り立つ。この注釈は基本的に (1.11) 式直後の注と同じである。

⁵しつこいようであるが、 $\mathbf{F}_i$ は束縛力を考えず、外力 (applied force) のみを対象としていけばよい。

2.1.4 ラグランジアン

多くの場合、外力はポテンシャルから導かれる。重力が一樣にかかっている場合のような簡単な場合から、場所ごとに大きさも方向も異なるが時間的には変わらないなどの場合までこれに相当する。そのような場合、質点 i の位置 $\mathbf{r}_i$ の関数として位置エネルギー U が、

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) \quad (2.14)$$

のように定義される⁶。質点 i に働く外力は

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x_i} \\ -\frac{\partial U}{\partial y_i} \\ -\frac{\partial U}{\partial z_i} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

となる。このときハミルトンの原理 (2.13) 式の左辺第二項は

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right) dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} [U(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + \delta \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n + \delta \mathbf{r}_n) - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)] dt \\
&= - \left[\int_{t_1}^{t_2} U(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + \delta \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n + \delta \mathbf{r}_n) dt - \int_{t_1}^{t_2} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) dt \right] \\
&= -\delta \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad (2.16)
\end{aligned}$$

⁶量子力学では位置エネルギーは文字 V が使われ、 U はユニタリー行列またはユニタリー変換の意味で使われることが多いが、古典力学では位置エネルギーを U で表すことが多いので、まずはそれに従う。 V を使っている教科書もある。

となり、これとハミルトンの原理 (2.13) 式を組み合わせ得られる

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \quad (2.17)$$

をハミルトンの 最小作用の原理 (least-action principle または principle of least action) と呼ぶ⁷。
ここで

$$L \equiv T - U \quad (2.18)$$

で定義される L を ラグランジアン (Lagrangian) またはラグランジュ関数と呼ぶ。つまりは、力学の問題を解くということは変分問題 (2.17) 式を解くということになった。変分問題 (2.17) 式の優れているところは、座標を x, y, z のデカルト座標をとるか、あるいは r, θ, ϕ の極座標など別の座標をとるかによらない、普遍的な形をしていることにある。後にラグランジュの方法が一般の座標に対していかに便利かを見るであろう。それは次節に回すとして、この節ではデカルト座標でもう少しラグランジュの方法を見て行く。

さて変分問題 (2.17) 式が与えられたのだから、我々は既にそのオイラー方程式を書き下すことを学んだ。それはたちどころに

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (2.19)$$

となる。もちろんこれらの式で x_i の代わりに y_i あるいは z_i で置き換えたものも含み、計 $3N$ 個の連立微分方程式となる⁸。これを ラグランジュ方程式 (Lagrange equation) またはラグランジュの 運動方程式 と呼ぶ。

⁷単に最小作用の原理といったとき、後日述べるモーペルテュイの最小作用の原理を指すことも多いので、この講義では「ハミルトンの」とか「モーペルテュイの」と付ける。

⁸(1.35 式における x を t に、 y_i を x_i, y_i, z_i に、 f を L に置き換える。

以上はデカルト座標で書いたものだが、実は座標変換してもこの方程式の形が変わらないところがラグランジュの解析力学の面目躍如たるところである。それは後で述べるとして、ここでは最も単純な例題によってラグランジュの運動方程式からニュートンの運動方程式が導かれることを見る。

[例題 2.3] 一様な重力場中を運動する一個の質点のラグランジアンを書き下し、ラグランジュの運動方程式を書け。それがニュートンの運動方程式を導くことを示せ。

ここでは水平面内に x 軸および y 軸を、鉛直上方に z 軸をとる。 x, y 面で一様な重力ポテンシャルは $U = mgz$ で表される。運動エネルギーは $T = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ であるから、ラグランジアンは

$$L \equiv T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (2.20)$$

となる。変数 x についてラグランジュの運動方程式と解は

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = -\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = 0 \quad (2.21)$$

となり、質量 m が時間的に変化しないとすれば、この解は x 方向に等速運動になる。これは y についても同じだから、 xy 平面内で等速直線運動をする。 z については

$$-mg - \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = 0 \quad (2.22)$$

となり、

$$\frac{d}{dt} (m\dot{z}) = -mg \quad (2.23)$$

となってニュートン力学に一致する。