

前回の演習問題の答

[演習問題 1] 平面上の（空間内でもよいが）二点を両端とする曲線のうち最も短いものは何か？ 変分法を使って解け。

答：汎関数

$$F(x, y, y') = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (1)$$

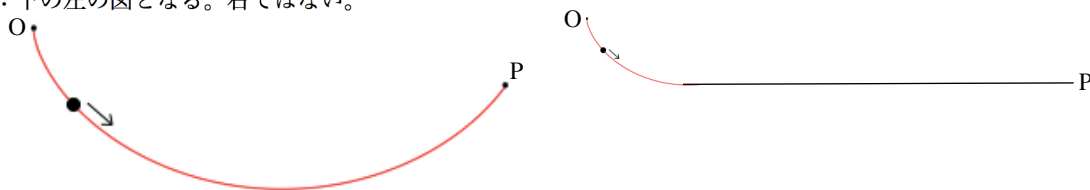
を最小にする問題である。変分関数 $f(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ が x を含まないことから (1.12) 式を使い、さらに f が y も含まないことを使って

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{const.} \Rightarrow y' = \text{const.} \quad (2)$$

となつて、 $y(x)$ は一次関数となる。答は $(0,0)$ と (a,b) を結ぶ線分となる。

[演習問題 2] 例題 1.4 の最速降下線の解はサイクロイドということになったが、 a/b が π より大きいとき、下る一方のサイクロイドで点 O と P を結ぶものはない。このとき解はどうなると思うか？ およその形を図示せよ。

答：下の左の図となる。右ではない。



これまでのまとめ

第 1 章 極値問題と変分法

1.1 極値問題・停留問題

1.1.1 極値問題への読み替え

1.1.2 関数の極値問題

1.1.3 条件付き極値問題

1.1.4 ラグランジュの未定乗数法

1.2 汎関数の停留問題

1.2.1 オイラー方程式

1.2.2 最速降下線

1.2.3 汎関数の停留問題（束縛条件あり）

1.2.4 関数がいくつもある場合、その他

第 2 章 ラグランジュ形式の力学 — 基礎編 —

2.1 保存力下でのラグランジュの運動方程式

2.1.1 仮想仕事の原理 → 静力学での釣り合いの原理

2.1.2 ダランベールの原理 → 動力学での釣り合いの原理

2.1.3 ハミルトンの原理 → 動力学での変分原理

2.1.4 ラグランジアン $L \equiv T - U$

} L の時間積分を汎関数とする停留問題

前回

2.2 座標変換とラグランジュの運動方程式 . .

オイラー方程式

2.2 座標変換とラグランジュの運動方程式

座標変換を行ってもラグランジュの運動方程式が変わらないことを見る。座標変換が有効に働く例として束縛条件のある例から入る。次に束縛条件がなくても座標変換が有効な場合（循環座標）を述べ、さらに一般座標を導入する。

2.2.1 ホロノミックな束縛

[例題 2.4] 振り子のラグランジアンを書き下し、ラグランジュの運動方程式を書け。ただし鉛直平面内（この図の紙面内）での往復運動のみを考えよ。

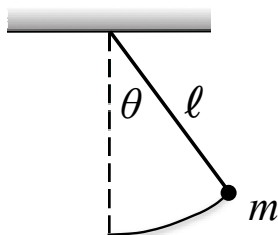


図 2.2: [例題 2.4] の図。糸はピンと張っていて、弛むほどの激しい運動は考えない。

これを 単振り子 という。ラグランジアンは $L = T - U$ から直ちに

$$L = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell(1 - \cos\theta) \quad (2.24)$$

である。さてラグランジュの運動方程式とは、元をただせば L の時間積分を最小にするを運動を求める変分問題のオイラー方程式である。いまの場合、運動とは θ の時間依存性である。これがどんな関数のとき L の時間積分を最小にするかという話だから、第 1 章の変分法の一般論において変数 x を時間 t とし、関数 y を θ とし、変分関数 $f(x, y, \dot{y})$ を $L(t, \theta, \dot{\theta})$ とすればよいだけのことである。したがってそのオイラー方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad (2.25)$$

にほかならず、これは例題 2.4 の場合

$$-mg\ell \sin\theta - m\ell^2\ddot{\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta \quad (2.26)$$

となって、ニュートン力学で求められる式に一致する。

ニュートン力学ではデカルト座標から極座標に座標変換すると、時間微分や時間の 2 回微分の表式が複雑になった。またデカルト座標は長さの次元を持っているが、 θ は次元を持たない。だからラグランジュの運動方程式が (2.25) 式のように (2.19) 式と全く変わらない形をしていることは一瞬不思議な気がするかもしれない。しかし上の議論のように変分法から来ている話であることを考えれば、形が変わらないのは当然のことである。ここに解析力学の便利さの片鱗が垣間見える⁹。

⁹ラグランジュの運動方程式を変分法を使わずに微分を駆使して導く教科書もあるが、座標変換で形が変わらないことの証明は長くなる。それよりオイラー方程式であるという説明の方が、変数が何であるかにかかわらないので、直感的に理解しやすい。また変分法は応用範囲が広く多分野にわたる重要な手法なので、この講義では変分法から入る導入とした。後日、保存力下でない場合などのときに微分を駆使する方法にも登場してもらう。

上の例では「糸がたるまない」という条件があったので、極座標 (r, θ) の r は定数 l となり、変数は θ の一次元だけで処理できた。このことをもう少し形式張っていうと、 x, y 座標という二次元の座標を「束縛条件によって一定となってしまう座標」と「束縛条件内で位置を指定する座標」に変換し、前者を問題の表舞台から消し、後者だけ考えればいように座標変換をしたのである。

このことをさらに一般的にいておこう。質点の座標が自由でなく座標間の関係式、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{あるいは時間も含む} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad (2.27)$$

で結ばれている束縛条件のことを ホロノミック (holonomic) な束縛といい、そのような系をホロノーム系という。(2.27) 式の左式のように束縛条件が時間を含まない場合を スクレロノーマス (scleronomous) な束縛といい、時間を含む場合を レオノーマス (rheonomous) な束縛という。(2.27) 式のように書けない束縛を含む系は一括して 非ホロノーム系 と呼ばれる。そのような系としては、糸が弛むことも許すような不等式で表される束縛や、床を滑らずに転がる球や円盤のように変数の微分の関係式を積分して (2.27) 式の形にできない場合などがある。弛まない振り子はホロノーム系のよい例である。束縛条件は一般にラグランジュの未定乗数法で処理できるわけであるが、ホロノミックな束縛の場合は上記の「束縛条件によって一定となってしまう座標と束縛条件内で位置を指定する座標に分け、ラグランジュの運動方程式の個数を減らす」のように、ラグランジュの未定乗数法すら使わない簡単化も可能である。ラグランジュの解析力学が束縛条件に威力を発揮する理由の一つはこれである。

では束縛条件がない場合は座標変換のうま味はないかということ、ある。それはポテンシャル U の対称性や性質をうまく利用した座標変換である。次にその例を、やはり極座標に求めてみる。

2.2.2 循環座標

中心力場の下で二次元平面上を運動する質点を考える。二次元の 極座標 (polar coordinate) と x, y 座標の関係は、時間微分も考えると

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - (r \sin \theta) \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + (r \cos \theta) \dot{\theta} \end{cases} \quad (2.28)$$

である。これより運動エネルギーは

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (2.29)$$

となる。そこで

[例題 2.5] 中心力場中を動く一つの質点のラグランジュ方程式を書き、角運動量保存則を導け。

という問題を考える。中心力場とはポテンシャル U が原点からの距離 $|\vec{r}| = r$ のみに依存する力の場であった¹⁰。したがってラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r) \quad (2.30)$$

この中に θ が入っていないので、変数 θ に関するラグランジュの運動方程式 (2.25) は

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \text{const.} \quad (2.31)$$

¹⁰いま万有引力やクーロン力のような逆二乗の法則を特に仮定してはいない、一般の中心力であることに注意。

と積分される。この θ ように座標がラグランジアンに含まれない場合、循環座標 (cyclic coordinate) と呼ぶ。この場合循環座標の時間微分に関する保存則が導かれる。実際 (2.31) 式にラグランジアン (2.30) を入れると

$$mr^2\dot{\theta} = \text{const.} \quad \text{角運動量保存 (angular momentum conservation)} \quad (2.32)$$

を得る。

例題 2.5 における循環座標の例の提示は以上であるが、例題 2.5 ではもう一つの座標 r についてのラグランジュの運動方程式を処理しなければならない。それは

$$mr\dot{\theta}^2 - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad (2.33)$$

となり、これはニュートン力学で学んだ遠心力を含んだ

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2 \quad (2.34)$$

にほかならない。

2.2.3 一般座標によるラグランジュの運動方程式

以上はデカルト座標→極座標への変換を見てきたが、座標変換でラグランジュの運動方程式が変わらないのは変分法によるからであり、極座標に限った話ではない。したがって上記 θ に限らず一般に質点の位置を指定する変数を q とすると、

$$L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - U(q) \quad (2.35)$$

として

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.36)$$

さらに変数が多い場合、たとえば x, y, z から座標変換して q_1, q_2, q_3 が得られた場合、あるいはもつと一般に多粒子系で $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ とした場合、

$$x_i = x_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.37)$$

と座標変換される。この場合の i は粒子の番号でなく、粒子 1 の x, y, z 、粒子 2 の x, y, z 、 $\dots$ 、粒子 N の x, y, z に通し番号を付けたものである。つまり $n = 3N$ である。(2.37) 式を逆に解いた

$$q_i = q_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.38)$$

を 一般座標 (generalized coordinate) または一般化座標という。(2.37) 式や (2.38) 式に t が陽に入っているのは、時間とともに回転する座標系などにも対応するためである。しかし本講義では当面 座標変換は時間を含まない のとしよう。すなわち

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad q_i = q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.39)$$

とする。ラグランジアンを一般座標で書くため、まず位置エネルギー U は座標のみの関数なので

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.40)$$

となる。2 番目のイコールは、 x 座標表示だろうが q 座標表示だろうが空間の同一地点で位置エネルギーの値は同じであることをいっているのであって、関数形は座標の取り方によって当然異なる。運動エネルギーは速度を含むので、まず (2.39) 式より

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (2.41)$$

となるので、

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \quad (2.42)$$

となる。これに (2.39) 式およびその偏微分を入れれば、つまりは

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (2.43)$$

の形となるので、これよりラグランジアンは

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = T(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) - U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.44)$$

の形となって—つまり一般座標の 2 次微分など出て来ず、変数の 1 次微分までしか含まない変分法のオイラー方程式がそのまま使えて—ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n (= 3N) \quad (2.45)$$

となる¹¹。

一般座標の次元はデカルト座標のような長さの次元を持つとは限らない。それは例題 2.4 における θ や次節の球座標 (3 次元極座標) における θ および ϕ の例からも明らかである¹²。しかしラグランジアン¹³の物理的次元は常にエネルギーであり、その時間積分やその変分である (2.17) 式の次元は常に作用である。

¹¹ ラグランジアンには不定性がある。適当な関数 $W(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$ の微分 dW/dt を付け加えてもラグランジュの運動方程式は変わらない。

¹² これに対応して一般化運動量や一般化力が定義される (後日) が、これらの次元も運動量や力とは限らない。

¹³ もちろん $T + U$ ではないので全エネルギーを意味しない。 $T + U$ は後にハミルトニアンとして現れる。

2.2.4 極座標、球座標での運動エネルギー

極座標 (図 2.3 左) で 1 粒子の場合は既に例題 2.4 や中心力場の問題で見てきた。中心力場の例では (2.28) 左の式が一般論の (2.39) 式の左式に対応し、(2.28) 右の式が (2.41) 式に、(2.29) 式が (2.43) 式に、(2.30) 式が (2.44) 式に対応していた。球座標 (図 2.3 右) で 1 粒子系の場合、(2.39) 式の左式に相当するのは次式である。

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

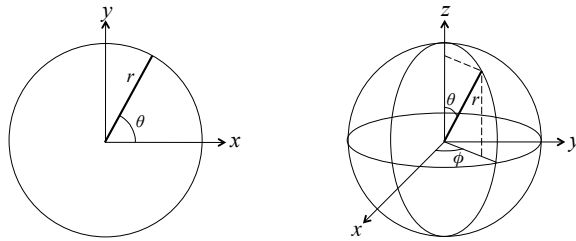


図 2.3: 左: 極座標、右: 球座標

[問 2.2] 球座標において (2.41) 式から (2.42) にかけての計算を行い、(2.43) 式に対応する式が

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\phi})^2 \sin^2 \theta] \quad (2.47)$$

で与えられることを示せ。

2.3 周期運動への応用

周期運動、とりわけ振り子はラグランジアンに応用問題の宝庫であるとともに、力学を超えて他の分野で用いられる概念への橋渡しにもなる例を提供する。

2.3.1 質点の一つの振り子

球面振り子

図 2.2 の単振り子において鉛直面内の往復運動に限定しない場合、質点は球面上に束縛された運動となる。これを球面振り子という¹⁴。球座標で $r = \text{一定} \equiv \ell$ の場合だから、質点の動きは θ と ϕ で表される二次元運動となる。前節で球座標の運動量を計算してあるから、次の問は簡単であろう。

[問 2.3] 球面振り子のラグランジアンを θ と ϕ の関数として書き、ラグランジュの運動方程式を書き下せ。

さてここでは別の方法で束縛条件を扱おう。そもそも前節から問 2.3 までラグランジュの未定乗数法を使わず、束縛条件を先に使って自由度を減らした一般座標にする方法ばかり述べて来た。それは第 1 章で述べたラグランジュの未定乗数法は何のために導入したのかと思うであろう。実は束縛力を求めるのに使えるのである。振り子の糸にかかる張力は、質点の重さ以上になる。ブランコの鎖やクレーンのワイヤーなどを、運動時の耐荷重強度を加味して設計したい場合は、束縛力も知る必要がある。そのためには自由度を減らす方法では足りず、ラグランジュの未定乗数法に戻る必要がある。

¹⁴特に糸が重さのない棒のときは、質点が球面の上半分に達しても球面から落ちない。

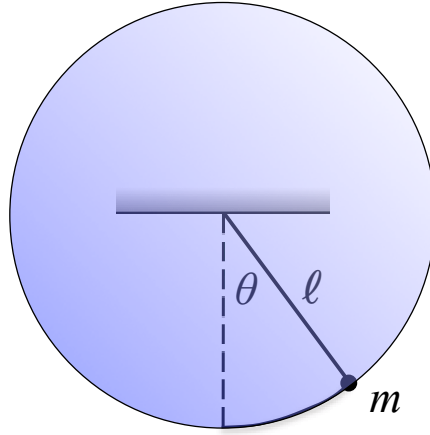


図 2.2: [例題 2.4] の図。糸はピンと張っていて、弛むほどの激しい運動は考えない。

束縛条件付き
変分法の復習

一般に 束縛条件 (binding condition)

$$G[y] = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = c \text{ (const.)} \quad (1.22)$$

のもとに

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1.23)$$

の停留を与える関数 $y_0(x)$ と停留値を求める問題を束縛条件付き変分問題と言う。ラグランジュの未定乗数を λ として変分関数および変分汎関数は

$$h(x, y, y', \lambda) = f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y') \quad \text{および} \quad H[y] = \int_{x_1}^{x_2} h(x, y, y', \lambda) dx = F[y] - \lambda G[y] \quad (1.24)$$

そこで (1.24) 式に対応して「束縛条件なしのラグランジアン - λ 倍の束縛条件式」の形にするため、いったん振り子の長さも可変として一般座標 r を残すと、停留にすべき変分は

$$L' \equiv \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgr \cos \theta - \lambda(r - \ell) \quad \text{として} \quad \delta \int L' dt = 0 \quad (2.48)$$

である。対応するラグランジュの運動方程式を書き下し、あらためて束縛条件を使うと

$$\lambda = m\ell (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mg \cos \theta \quad (2.49)$$

$$0 = \ell \ddot{\theta} - \ell \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \quad (2.50)$$

$$0 = \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin^2 \theta) \quad (2.51)$$

となる。

いま簡単のため $\theta = \text{一定}$ 、すなわち質点は半径 $\ell \sin \theta$ の水平な円周を動くとする。このときの糸の張力 F_r (もし振り子でなく球面お椀だったらお椀からの垂直抗力) を求めてみよう。張力は質点に働く重力および遠心力と釣り合って質点を球面上に張り付かせているのだから、図 2.4 より明らかに

$$F_r = mg \cos(\pi - \theta) + m\ell \dot{\phi}^2 \sin(\pi - \theta) = -mg \cos \theta + m\ell \dot{\phi}^2 \sin \theta \quad (2.52)$$

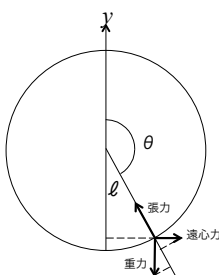


図 2.4: 張力、重力、遠心力の釣り合い

となって、これは $\theta = \text{一定}$ としたときの (2.49) 式に一致する。このこと、すなわち「未定乗数は束縛力を表す」ということは、より一般的に言えるのであって、もともと束縛条件をいったん外すために便宜的に導入された未定乗数 λ は、力学にあっては束縛力の意味を持つ。すなわち未定乗数法は束縛力も同時に求める手法となっている。それがなければ前節の扱いすなわち自由度を下げる方法や循環座標を使う方法で済むが、済まない場合はラグランジュの未定乗数法も併用すればよい。

サイクロイド振り子

図 2.5 左のように天地逆にしたサイクロイドのお椀の中を往復する質点の動きをサイクロイド振り子という。振り子と呼ぶ理由は、同図右のサイクロイド A と B の接点 S から吊した振り子がサイクロイド A と B に巻き付きながら振れたときの軌跡 PQR は、やはりサイクロイド（右図のサイクロイド C）になることが知られている。巻き付くあるいは巻きほどくときの軌跡を伸開線 (involute) というが、サイクロイド A の伸開線はサイクロイド C の左半分、B の伸開線は C の右半分である。またある曲線の曲率中心の軌跡を縮閉線 (evolute) というが、サイクロイド C の左半分の縮閉線はサイクロイド A、サイクロイド C の右半分の縮閉線はサイクロイド B、となっている。

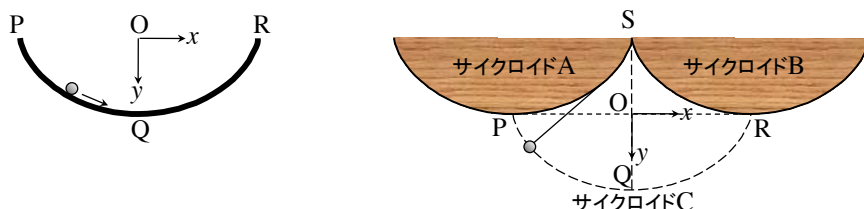


図 2.5: 左：サイクロイドお椀の中の玉。右：サイクロイドの天井から下がる振り子。

サイクロイドは媒介変数 θ により

$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin \theta) \\ y = a(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad (2.53)$$

と表される。 y 軸は図 2.5 左のように下向きにとっている。また a は PR の直線距離が $2\pi a$ となるようにとっている。半径 a の円が初期接点を P として天井からぶら下がりながら転がったときの点の軌跡であり、一回転して点 R に至る。その間 θ は $-\pi$ (点 P) から 0 (点 Q) を通って π (点 R) まで動く¹⁵。いま、点 Q から測ったサイクロイド C の弧長を一般座標 q としよう。点 Q より右側を $q > 0$ 、左側を $q < 0$ になるようにとる。

〔問 2.4〕 $q = 4a \sin(\theta/2)$ であることを示し、 q の運動方程式を求めよ。また振り子の周期はいくらか？

この問の答からわかるように、サイクロイド振り子は振幅によらず厳密に等時性が成り立つ。通常の振り子が小振幅のときのみ近似的に等時性が成り立つとは異なる。

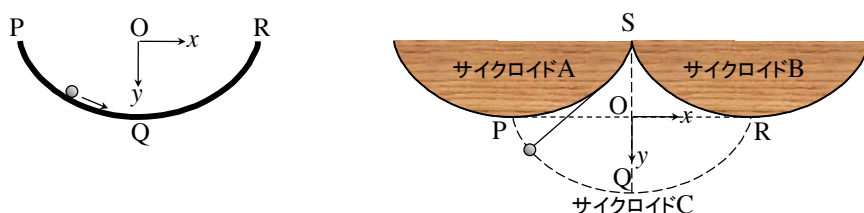


図 2.5: 左：サイクロイドお椀の中の玉。右：サイクロイドの天井から下がる振り子。