平成29年度　解析力学　講義ノート [4]（担当：井元信之）

2017年6月1日

前回の演習問題の答

［問 2.1］天井から下がるバネに繋がれた質点が上下方向のみ運動する場合を考え、ラグランジアンおよびラグランジュの運動方程式を書き、一般解を求めよ。ただし

(1) バネの自然長の最下位置から上向きに測った質点の位置を座標 z とした場合

(2) 質点をバネに付けたときの釣り合いの位置から上向きに測った質点の位置を z とした場合

について論ぜよ。バネ定数を k、バネの長さを ℓ、質点の質量を m とし、バネの質量は無視せよ。

- 解（1）バネの自然長の位置を基準とした場合、

$$L=\frac{m}{2}\dot{z}^2-mgz-\frac{k}{2}z^2 \quad\rightarrow\quad \ddot{z}=-g-\frac{k}{m}z=-\frac{k}{m}\left(z+\frac{mg}{k}\right) \quad\rightarrow\quad z=-\frac{mg}{k}+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t+\phi\right)$$

$$z=-\frac{mg}{k}+A\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\ (t-t_0)\right] \text{でもよい}$$

- 解（2）バネの釣り合いの位置を基準とした場合、

$$L=\frac{m}{2}\dot{z}^2-mgz-\frac{k}{2}\left(z-\frac{mg}{k}\right)^2 \quad\rightarrow\quad \ddot{z}=-g-\frac{k}{m}\left(z-\frac{mg}{k}\right)=-\frac{k}{m}z \quad\rightarrow\quad z=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t+\phi\right)$$

$$z=A\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\ (t-t_0)\right] \text{でもよい}$$

サイクロイドは媒介変数 θ により

$$\begin{cases} x=a(\theta+\sin\theta) \\ y=a(1+\cos\theta) \end{cases} \tag{2.53}$$

と表される。y 軸は図 2.5 左のように下向きにとっている。また a は PR の直線距離が $2\pi a$ となるようにとっている。半径 a の円が初期接点を P として天井からぶら下がりながら転がったときの点の軌跡であり、一回転して点 R に至る。その間 θ は $-\pi$(点 P) から 0(点 Q) を通って π(点 R) まで動く[15]。いま、点 Q から測ったサイクロイド C の弧長を一般座標 q としよう。点 Q より右側を $q>0$、左側を $q<0$ になるようにとる。

［問 2.4］$q=4a\sin(\theta/2)$ であることを示し、q の運動方程式を求めよ。また振り子の周期はいくらか？

この問の答からわかるように、サイクロイド振り子は振幅によらず厳密に等時性が成り立つ。通常の振り子が小振幅のときのみ近似的に等時性が成り立つのとは異なる。

[15] (1.19) 式と θ の取り方が異なることに注意。

2.3.2　質点が二つあるいは剛体の振り子

連成振り子 — 分子、固体物理など多様な分野へ続く重要概念

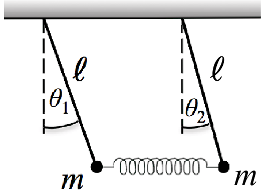

図 2.6: 連成振り子。

質量 m、長さ ℓ の振り子が二つ、バネ定数 k のバネで連結されている。静止位置では糸は平行な重力方向を向き、糸およびバネの質量は無視できるとする。それぞれの振れの角を θ_1 および θ_2 とすると、ラグランジアンは直ちに

$$L = \frac{m}{2}\ell^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + mg\ell\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) - \frac{k}{2}\ell^2\left[\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)^2 + \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)^2\right] \quad (2.54)$$

と書け、運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} m\ell^2\ddot{\theta}_1 + mg\ell\sin\theta_1 + k\ell^2\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0 \\ m\ell^2\ddot{\theta}_2 + mg\ell\sin\theta_2 - k\ell^2\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.55)$$

$\theta_1, \theta_2 \ll 1$ として

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 = -\omega_g^2\theta_1 - \omega_k^2\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ \ddot{\theta}_2 = -\omega_g^2\theta_2 + \omega_k^2\left(\theta_1 - \theta_2\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{ただし} \quad \omega_g \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,, \quad \omega_k \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.56)$$

両式の和と差をつくると、$\Theta_1 \equiv \theta_1 + \theta_2$、$\Theta_2 \equiv \theta_1 - \theta_2$ として

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\Theta}_1 &= -\omega_g^2\Theta_1 \\ \ddot{\Theta}_2 &= -\left(\omega_g^2 + 2\omega_k^2\right)\Theta_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \Theta_1 &= A_1\cos\left(\omega_g t + \phi_1\right) \\ \Theta_2 &= A_2\cos\left(\sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2}\; t + \phi_2\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.57)$$

という <u>基準振動</u>（normal modes）が得られる。

特に $A_1 = A_2 \equiv A$ のとき、

$$\theta_1 = A\cos\left(\frac{\sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2} - \omega_g}{2}\; t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2} + \omega_g}{2}\; t\right) \quad (2.58)$$

$$\theta_2 = A\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2} - \omega_g}{2}\; t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2} + \omega_g}{2}\; t\right) \quad (2.59)$$

と、逆相でうなりを生ずる。

さらに $\omega_k \ll \omega_g$ の場合、$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ を使って

$$\theta_1 = A\cos\left(\frac{\omega_k^2}{2\omega_g}\; t\right)\cos\left(\omega_g t\right)\,, \quad \theta_2 = A\sin\left(\frac{\omega_k^2}{2\omega_g}\; t\right)\sin\left(\omega_g t\right) \quad (2.60)$$

と、元の単振り子の振動（ω_g）にゆっくりした角振動数 $\omega_k^2/2\omega_g$ の正弦波変調がかかる。

と、元の単振り子の振動（ω_g）にゆっくりした角振動数 $\omega_k^2/2\omega_g$ の正弦波変調がかかる。

連成振り子は次のような現象のモデルとなる。
・二つの振り子の代わりに二つの電磁波導波路の場合は、方向性結合器のモデルとなる。
・原子と光の場合はラビ振動（Rabi oscillation）のモデルとなる。
・二つの原子の場合は、分子結合のモデルとなる。
・結晶中の $\omega - k$ 関係が交差する地点で分裂し、エネルギーのバンド構造を生ずるモデルとなる。

二重振り子 — 最も簡単なロボットアーム

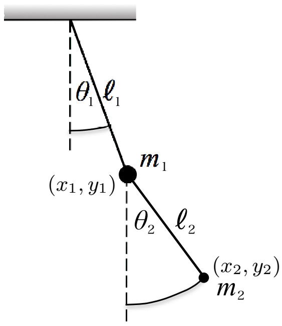

図 2.7: 二重振り子

図のように直列に繋がった振り子で糸は弛まないとする。曲がらない棒が質点 m_1 のところで自由な角度をとるよう繋がれているとしてもよい。糸（棒）の質量は無視する。糸がたるまないとすれば、糸の代わりに軽くて丈夫なロボットアームの最も簡単なモデルである。

質点 m_1 のデカルト座標を (x_1, y_1)、質点 m_2 のそれを (x_2, y_2) とすると、ラグランジアンは

$$L = T - U \quad ただし \quad T = \frac{m_1}{2}\left[(\dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_1)^2\right] + \frac{m_2}{2}\left[(\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2\right] \quad および \quad U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{2.61}$$

である。ここで一般座標を θ_1 と θ_2 にとると、

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \ell_1 \sin\theta_1 \,, \quad y_1 = \ell_1 \cos\theta_1 \\ x_2 = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2 \,, \quad y_2 = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 \end{array}\right\} \tag{2.62}$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2}\left[(\ell_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (-\ell_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2\right] \\ &\quad + \frac{m_2}{2}\left[(\ell_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \ell_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (-\ell_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - \ell_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2\right] \\ &\quad - m_1 g\ell_1\cos\theta_1 - m_2 g(\ell_1\cos\theta_1 + \ell_2\cos\theta_2) \\ &= \frac{m_1}{2}\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[(\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)\right] \\ &\quad - m_1 g\ell_1\cos\theta_1 - m_2 g(\ell_1\cos\theta_1 + \ell_2\cos\theta_2) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2}\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_1 g\ell_1\cos\theta_1 - m_2 g(\ell_1\cos\theta_1 + \ell_2\cos\theta_2) \end{aligned} \tag{2.63}$$

したがって θ_1 に関してラグランジュの運動方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1+m_2)\ell_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_1\ell_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\right] \\ &\quad - m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - m_1 g\ell_1\sin\theta_1 - m_2 g\ell_1\sin\theta_1 \end{aligned} \tag{2.64}$$

すなわち

$$(m_1+m_2)\ell_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_1\ell_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right] = -(m_1+m_2)\ell_1 g\sin\theta_1 \tag{2.65}$$

θ_2 に関しても同様にして

$$m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2\ell_1\ell_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right] = -m_2\ell_2 g\sin\theta_2 \tag{2.66}$$

以上二式が運動方程式である。

ここで微小振動すなわち $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ の場合を考え、$\cos\theta \simeq 1$、$\sin\theta \simeq \theta$、$\ddot{\theta} \ll \dot{\theta}^2\theta$ などを使って、

$$(m_1+m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2\ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)g\theta_1 \tag{2.67}$$

θ_2 に関しても同様にして

$$m_2\ell_2\ddot{\theta}_2 + m_2\ell_1\ddot{\theta}_1 = -m_2 g\theta_2 \tag{2.68}$$

(2.67) $-$ (2.68) を作ると、

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1}\theta_1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1}\theta_2 \tag{2.69}$$

を得、(2.67)$\times m_2$ $-$ (2.68)$\times(m_1+m_2)$ を作ると、

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1}(\theta_1-\theta_2) \tag{2.70}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1} & \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1} \\ \frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1} & -\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{2.71}$$

を得る。あとは係数行列の固有値と固有ベクトルを求め、基準振動（ノーマルモード）を得ればよい。

例として $m_1 = m_2$、$\ell_1 = \ell_2 \equiv \ell$ の場合を考えると、(2.71) は

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{ただし} \quad \gamma \equiv \frac{g}{\ell} \tag{2.72}$$

そこで固有ベクトルを求め、新たに

$$\Theta_1 \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}\theta_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\theta_2\,, \quad \Theta_2 \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}\theta_1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\theta_2 \tag{2.73}$$

とおくと、(2.72) は

$$\begin{pmatrix} \ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{\Theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{ただし} \quad \omega_1 \equiv \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\gamma\,, \quad \omega_2 \equiv \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\gamma\,, \tag{2.74}$$

と対角化されて、

$$\Theta_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)\,, \quad \Theta_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{2.75}$$

という基準振動が得られる。(2.73) を逆に解けば、θ_1、θ_2 の運動は Θ_1、Θ_2 の線形結合となる。

2本吊り振り子 — ブランコのねじれ振動：多様な内部自由度

ブランコのように2カ所から吊された剛体棒の振り子は、前後に振れるのみならず、捻れ方向にも振動する。これは、捻れると図2.8の右図のように棒が z だけ浮き上がるので、重力が捻れを戻そうとするからである。簡単のため図のように対称な構造とし、捻れ振動だけにに着目する。構造を決めているのは a、ℓ、L、そして最終的には振動の周期に影響しないが棒の質量 M である。吊り糸の質量は無視する。釣り合い状態（左図）で糸が鉛直方向となす角 α および最大捻れ状態（右図）で糸が鉛直方向となす角 α'（図には示されていない）を用いると、静止位置からの上昇分 z は

$$z = \ell\cos\alpha - \ell\cos\alpha' = \frac{aL}{8\ell\cos\alpha}\theta^2 \tag{2.76}$$

となる。

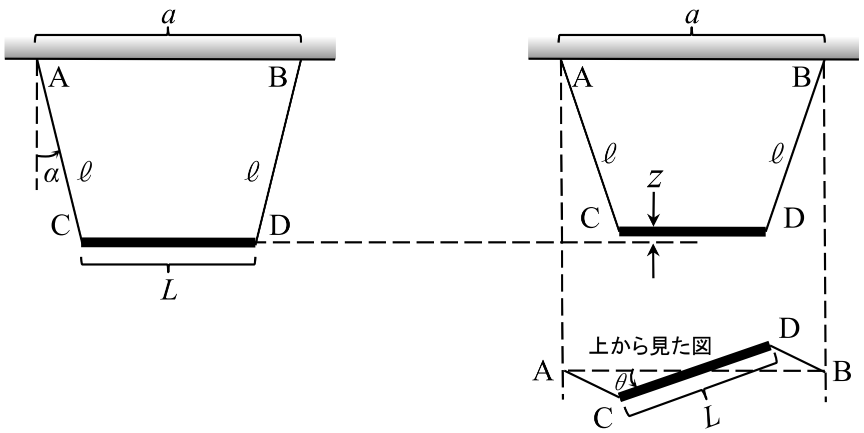

図 2.8: 棒振り子。左：安定静止位置の正面図。右：水平に θ 捻った場合の正面図および上から見た図。

となる。また α および α' はそれぞれ

$$\ell\sin\alpha = \frac{1}{2}(a-L) \tag{2.77}$$

および

$$\begin{aligned}\ell\sin\alpha' &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{aL}{2}\cos\theta} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{aL}{2}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a-L}{2}\right)^2 + \frac{aL}{4}\theta^2} = \sqrt{(\ell\sin\alpha)^2 + \frac{aL}{4}\theta^2} \end{aligned}\tag{2.78}$$

の関係式を満たす。(2.78) の2番目の等式において θ は小さいとし $\cos\theta = 1-\theta^2/2$ とした。
したがって

$$\begin{aligned}\ell\cos\alpha' &= \sqrt{\ell^2 - (\ell\sin\alpha')^2} = \sqrt{\ell^2 - (\ell\sin\alpha)^2 - \frac{aL}{4}\theta^2} = \sqrt{(\ell\cos\alpha)^2 - \frac{aL}{4}\theta^2} \\ &= \ell\cos\alpha\sqrt{1-\frac{aL}{4\ell^2\cos^2\alpha}\theta^2} = \ell\cos\alpha\left(1-\frac{aL}{8\ell^2\cos^2\alpha}\theta^2\right) \end{aligned}\tag{2.79}$$

となり、これより

$$z = \ell\cos\alpha - \ell\cos\alpha' = \frac{aL}{8\ell\cos\alpha}\theta^2 \tag{2.80}$$

となる。したがって位置エネルギー U は

$$U = mg\frac{aL}{8\ell\cos\alpha}\theta^2 \tag{2.81}$$

となる。また z の時間変化は (2.80) 式より

$$\dot{z} = \frac{aL}{4\ell\cos\alpha}\theta\dot{\theta} \tag{2.82}$$

となる。したがって運動エネルギー T は上下動の分と棒の回転の分の和となり

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{aL}{4\ell\cos\alpha}\theta\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \tag{2.83}$$

となる[16]。ここで I は慣性モーメントであり、棒の質量密度を一様とすれば $I = mL^2/12$ である。したがってラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{aL}{4\ell\cos\alpha}\theta\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\frac{aL}{8\ell\cos\alpha}\theta^2 \tag{2.84}$$

であり、ラグランジュの運動方程式は

$$m\left(\frac{aL}{4\ell\cos\alpha}\right)^2\left(2\theta\dot{\theta}^2 + \theta^2\ddot{\theta}\right) + I\ddot{\theta} - m\left(\frac{aL}{4\ell\cos\alpha}\right)^2\theta\dot{\theta}^2 + mg\frac{aL}{4\ell\cos\alpha}\theta = 0 \tag{2.85}$$

[16]剛体を各要素部分に分ければ、角速度 $\dot{\theta}$ で一斉に回転するとき i 番目の要素の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m_i(r_i\dot{\theta})^2$ となるから、全運動エネルギー $= \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ となる。

いま a、L、ℓ はオーダーが違うほど差はないとすれば、項の大小は θ で決まり、微小振動すなわち $\theta \ll 1$ の場合を考える限り、θ の一次の項に比べて三次の項は無視できる。したがって上式は

$$\frac{mL^2}{12}\ddot{\theta} + mg\frac{aL}{4\ell\cos\alpha}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\frac{3a}{L\cos\alpha}\theta \tag{2.86}$$

となって、棒は角振動数 $\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}\sqrt{\frac{3a}{L\cos\alpha}}$ で振動する。仮に $a = L$ とすれば（$\alpha = 0$)、前後運動に比べねじり振動は $\sqrt{3}$ 倍速く振動することがわかる。

2.3.3　長さ可変な振り子

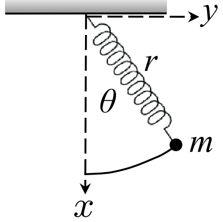

図 2.9: バネ振り子

糸でなくバネで結ばれた振り子は、運動方程式は立つが、それを解くのは容易ではない。しかし次章冒頭に結びつく 2 次元極座標の簡単な例であるので、運動方程式まで求めておく。座標変換は

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta \quad \text{したがって} \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\theta\sin\theta\,,\quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\theta\cos\theta \tag{2.87}$$

したがって

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left[\left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right] = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{2.88}$$

である。位置エネルギーは、バネ定数を k、バネの自然長を ℓ として

$$U = \frac{k}{2}(r-\ell)^2 - mgr\cos\theta \tag{2.89}$$

だから、ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(r-\ell)^2 + mgr\cos\theta \tag{2.90}$$

よってラグランジュの運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{r} = -k(r-\ell) + mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2 \\ &m\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = -mgr\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

となる。

2.3.4　定常解の回りの微小振動の問題

→ 後日レポートまたは試験問題として出す。

第3章　ラグランジュ形式の力学 — 一般編 —

前章ではハミルトンの原理から導かれる変分問題として解けるラグランジュの運動方程式を扱った。そのため主として束縛条件が時間に依存しない場合、力が保存力である場合、座標変換に時間が含まれない場合、質点が一つないし二つの問題などであった。本章ではこれらの範囲に収まらない一般の問題へと進む。それを扱うには座標だけ一般座標に変換するのでなく、運動量も一般運動量に変換し、また力も一般力に変換する。このためにポテンシャルを仮定した変分問題からラグランジュの運動方程式を導いた前章と異なり、微分方程式としての力学を一般力学へと発達させる方法をとる。

3.1　一般力の下でのラグランジュの運動方程式

まず保存力でない一般の力の下でのラグランジュの運動方程式を導出しよう。準備として保存力下でのラグランジュの運動方程式を再導出し、それを修正する形で、座標変換に時間が含まれる場合や保存力以外の力がある場合にも一般化する。これを行うため一般運動量および一般力を導入する。

つまり、ニュートン力学から（変分法でなく）ラグランジュの運動方程式を導く

つまり、座標変換に伴い、どのように「運動量 → 一般運動量」、「力 → 一般力」としたらよいか？

「力は運動量の時間変化を誘起する」→「一般力は一般運動量の時間変化を誘起する」とできないか?
「トルク は 角運動量 の時間変化を誘起する」のように。

力も運動量もベクトルだから、座標変換に伴い成分が変わってしまう。
エネルギー保存則が便利なのはスカラー（座標の入れ方によらない値）だから→エネルギーに着目

「運動量は運動エネルギーを速度（座標の時間微分）で微分したものである」
→「一般運動量は」運動エネルギーを一般座標の時間微分で微分したもの」と定義してみよう。

では一般力は？
これもエネルギー（＝仕事）から導こう。　「仕事とは変位に沿って力を積分したものである」
ならば「一般座標に沿って一般力を積分したものが仕事となる」ように一般力を定義してはどうか？

そして「一般運動量はこの一般力によって時間変化するもの」と定式化できないか？

実はそうはならず、少しだけ修正を要する。

修正後は、「一般運動量は『ラグランジアンの一般座標微分』によって時間変化する」と定式化される。
→ ラグランジュの運動方程式！ （この導き方の利点は、保存力でなくても使える点にある）

3.1 一般力の下でのラグランジュの運動方程式

3.1.1 一般運動量・一般力・運動方程式

- **2 次元デカルト座標の場合**

F が質点に対してする仕事 $\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

$$\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y$$

ニュートンの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = F_x \quad \text{および} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = F_y$$

一致
一致

- **極座標の場合**

F が質点に対してする仕事 $\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

$$\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = F_r\mathrm{d}r + rF_\theta\mathrm{d}\theta$$

ニュートンの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = F_r + mr\dot{\theta}^2 \quad \text{および} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = rF_\theta$$

一致せず
こちらは（たまたま）一致

$$Q_r \equiv F_r \quad \text{および} \quad Q_\theta \equiv rF_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

- **一般座標の場合**

F が質点に対してする仕事 $\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

$$\sum_i F_i\mathrm{d}x_i = \sum_j \boxed{\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}F_i}\,\mathrm{d}q_j$$

$$Q_j \equiv \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}F_i$$

$$\sum_i F_i\mathrm{d}x_i = \sum_j Q_j\mathrm{d}q_j$$

ニュートンの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$ このあと証明。

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

ラグランジュの運動方程式！