平成29年度　解析力学　講義ノート [10]（担当：井元信之）

2017年7月20日

前回の演習問題の答

［1］1次元の直線運動をする質点の運動エネルギー $T(\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ の変数を単純に $\dot{x}$ から運動量 $p \equiv m\dot{x}$ へ変数変換し、T を p で表せ。

答：$\dot{x} = \dfrac{p}{m}$ を $T(\dot{x}) = \dfrac{m}{2}\dot{x}^2$ に代入すればただちに $T(p) = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{p}{m}\right)^2 = \dfrac{1}{2m}p^2$ を得る。

［2］前問と同じく $T(\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ において、今度はルジャンドル変換の手続きを経て独立変数 $\dot{x}$ を運動量 $p \equiv \partial T/\partial\dot{x}$ に変更し、T を p で表せ。

答：ルジャンドル変換の理論によれば、変数変換 $x \ \rightarrow\ u\left(\equiv \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$ に伴う $f(x)$ のルジャンドル変換 $g(u)$ は $xu - f$ を u の関数で表したものであるから、今の場合 $x \rightarrow \dot{x}$ 、$u \rightarrow p$ 、$f \rightarrow T$ と読み替えれば、答 $= \dot{x}p - T = \dfrac{p}{m}p - \dfrac{1}{2m}p^2 = \dfrac{1}{2m}p^2$ 　となる。

時間に依存しない座標変換

そうは言ってもラグランジュの方法でおなじみの座標だけの変換も正準変換であることは言っておく必要がある[9]。3次元デカルト座標から球座標への変換は、正準変換IIIで $W'' = -\left(p_x r\sin\theta\cos\phi + p_y r\sin\theta\sin\phi + p_z r\cos\theta\right)$ と選ぶことにより導かれる。

［問 4.5］このことを確認せよ。$x, y, z, p_r, p_\theta, p_\phi$ を計算し、x, y, z が座標変換の式になっていること、および p_r, p_θ, p_ϕ が問 4.1 の答を再現することを確認すればよい。

一般の座標変換は $W'(q, P) = f(q)P$ とおくことにより $p = \frac{\partial W''}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q}P$ のように表される。

時間に依存する座標変換：減衰振動の例

時定数 γ の減衰を伴う振動子のラグランジアンを $L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)e^{2\gamma t}$ とすると、減衰項を伴う運動方程式 $m(\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega^2 q) = 0$ を得る[10]。一般座標は $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}e^{2\gamma t}$、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p^2 e^{-2\gamma t} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 e^{2\gamma t} \tag{4.59}$$

である。時間に陽に依存するこのハミルトニアンを母関数 $W'(t, q, P) = qPe^{\gamma t}$ により正準変換すると、$p = Pe^{\gamma t}$、$Q = qe^{\gamma t}$、$\tilde{H} = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m}{2}\omega^2 Q^2 + \gamma PQ$ となって、時間に陽に依存しないハミルトニアンとなる。もちろん本来エネルギー散逸のある系を見かけ上時間に依存しないハミルトニアンにしているので、変換後の運動方程式を解いて得られる保存量が質点のエネルギーというわけではない。

[9] 座標のみの変換を点変換という。座標に引きずられて (4.25) のように運動量も変換されるのもそのうちに入る。したがって点変換は正準変換である。

[10] これは散逸関数を使わずラグランジアンに減衰項を繰り込む方法である。

時間に依存する変換：位相空間の回転

再び q と p 運動量にまたがる位相空間内での変換である。ハミルトニアンが $H = (\omega/2)(p^2 + q^2)$ である系、すなわち規格化された調和振動子を考える。位相空間では円周上を等角速度 ω で動く。そこで、同じく角速度 ω で回転する Q と P に変換して、軌跡が一点にとまるようにすることを考える。いま正準変換 I で母関数として

$$W(t, q, Q) = \frac{q^2 \cos\omega t - 2qQ + Q^2 \cos\omega t}{2\sin\omega t} \tag{4.60}$$

とする。(4.44) より

$$Q = -p\sin\omega t + q\cos\omega t \quad \text{および} \quad q = P\sin\omega t + Q\cos\omega t \tag{4.61}$$

を得る。第二式の Q に第一式右辺を代入すると $P = p\cos\omega t + q\sin\omega t$ を得るから、併せて

$$P = p\cos\omega t + q\sin\omega t \quad \text{および} \quad Q = -p\sin\omega t + q\cos\omega t \tag{4.62}$$

あるいは逆に解いて

$$p = P\cos\omega t - Q\sin\omega t \quad \text{および} \quad q = P\sin\omega t + Q\cos\omega t \tag{4.63}$$

を得る。$\partial W/\partial t$ を計算することにより、変換されたハミルトニアンを求めると

$$\tilde{H} = H(P, Q) - \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2) \tag{4.64}$$

となる。ここで $p^2 + q^2 = P^2 + Q^2$ となることを使うと

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \tag{4.65}$$

となり、変換後の正準方程式は

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.66}$$

となって、P も Q も定数（ただし一般に異なる定数）となる。この P と Q は、言ってみれば p と q の位相空間の初期振幅と初期位相に相当する。調和振動子の動きに合わせて動く位相空間に乗ってみれば、それは動かない P, Q となる。

元の調和振動子 x, p_x における楕円軌道を無次元化して q, p 空間で円軌道にし、さらに回転する Q, P に変換して結局「何も動かない、一点だけの軌道」にしてしまった。ここまでする意義は何であろうか?

たとえば光すなわち電磁波では、電場の cos 成分と sin 成分がそれぞれ q と p になることが知られている。これは高い角振動数 ω で回転する[11]。これほど速く振動する q や p を直接測ることは難しい。しかし実際は q や p の振動を逐一追いたいということはまず無く、それより、基準となる光や電磁波に対する相対位相が重要であることが多い。相対位相は振動しない定数（あるいは時間とともにゆっくり動く変数）で、それはまさに Q や P である。干渉計の出力、ホログラフィー、ホモダイン検波やヘテロダイン検波は基準[12]との「位相差」を測っているのである。だから、実際に測っているのは Q や P であるし、その方が重要である。

もう一つの意義は、要するに初期条件を決めれば以後が決まるということだから、「運動とともに動く位相空間に観測者が乗れば、動かない初期条件をいつまでも見る」ことに相当する。これは次に述べることに繋がる。

---

[11] 可視光の場合数百テラヘルツである。(テラヘルツ $= 10^{12}$ ヘルツ)

[12] ホログラフィーでは基準となる波は参照波あるいは参照光とよばれ、ホモダイン・ヘテロダイン検波では局発光と呼ばれる。干渉計で基準となるのは位相変調を受けない光路に分岐した自分自身である。ディラックの言う「光子はそれ自身と干渉する」に対応している。

自然な運動による時間発展

(2.9) 式の注 3 で書いたように、$\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$ を作用積分と呼ぶ。これを S で表すと、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - H(p,q)\right]\mathrm{d}t = \int_{q_1}^{q_2} p\ \mathrm{d}q - \int_{t_1}^{t_2} H(p,q)\mathrm{d}t \tag{4.67}$$

となる。ただし $q_1 \equiv q(t_1)$、$p_1 \equiv p(t_1)$ である。いま系の時間発展が正準方程式に則ったものである場合を考える。その条件の下に作用 S の全微分をとると、積分の始点と終点の時間のずれしか寄与しないから、

$$\mathrm{d}S = p_2\mathrm{d}q_2 - p_1\mathrm{d}q_1 - \left[H(p_2,q_2) - H(p_1,q_1)\right]\mathrm{d}t \tag{4.68}$$

となる。ここで q_1, p_1 を変換前の一般座標と一般運動量 q, p とみなし、q_2, p_2 を変換後の Q, P とみなすと、

$$\mathrm{d}S = P\mathrm{d}Q - p\mathrm{d}q - \left[\tilde{H}(P,Q) - H(p,q)\right]\mathrm{d}t \tag{4.69}$$

となるから、(4.41) の両辺に $\mathrm{d}t$ をかけて得られる

$$\mathrm{d}W = p\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q - (H - \tilde{H})\mathrm{d}t \tag{4.70}$$

とを比較すると、これは「$S(q,Q)$ の符号を変えたものは正準変換 I の母関数 $W(q,Q)$ になる」ことを意味する。すなわち、正準方程式に則った時間発展は — 系が現実にとる運動は — そのものが正準変換にほかならない。

電磁場のゲージ変換

電磁気学で知られているように、微分可能な任意の関数 $\chi(t,\mathbf{r})$ を用いたゲージ変換

$$\mathbf{A} \ \mapsto\ \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \text{および} \quad \phi \ \mapsto\ \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{4.71}$$

に対してラグランジュの運動方程式は変わらない。ただし $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル、ϕ は電位ポテンシャルである。これを正準変換の観点から見る。いま、電磁場中を動く質量 m、電荷 e の荷電粒子のラグランジアンは (3.107) を再掲して

$$L = \frac{m}{2}\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2 + e\left(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right) - e\phi \tag{4.72}$$

で与えられる。一般運動量は

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \tag{4.73}$$

であるからハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\left|\mathbf{p} - e\mathbf{A}\right|^2 + e\phi \tag{4.74}$$

となる。ゲージ変換 (4.71) により $\mathbf{r}$、$\mathbf{p}$、H は

$$\mathbf{r} \ \mapsto\ \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\ (\text{変わらず})\,, \quad \mathbf{p} \ \mapsto\ \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + e\nabla_{\mathbf{r}}\chi \quad \text{および} \quad H \ \mapsto\ \tilde{H} = H - e\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{4.75}$$

と変換される。これより

$$\mathbf{p}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{p}}\cdot\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}-(H-\tilde{H})=-e\left(\nabla\chi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}+\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)=-e\ \mathrm{d}\chi \tag{4.76}$$

となる。これは正準変換 III で母関数 $W''=-\mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{r}}-e\chi(t,\tilde{\mathbf{r}})$ の場合に相当する。実際 (4.50) 三番目の式より

$$\tilde{\mathbf{p}}=-\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}}W'''=\mathbf{p}+e\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}}\chi \tag{4.77}$$

となり、(4.50) 二番目の式より

$$\mathbf{r}=-\nabla_{\mathbf{p}}W'''=\tilde{\mathbf{r}} \tag{4.78}$$

となり、(4.50) 一番目の式も併せて (4.75) の三式をすべて再現する。すなわち電磁場のゲージ変換は正準変換である。

4.3 ハミルトン・ヤコビの方程式とリウビルの定理

4.3.1 ポアソンの括弧式

力学の問題を解くということは質点（単一または複数）の位置の時間変化を求めるというのが通常の意味である。しかし「運動エネルギーの時間変化が知りたい」あるいは「角運動量の時間変化が知りたい」など、力学量の時間依存性を求めたいこともある[13]。力学量は力学変数とも呼ばれるが、それが時間に陽に依存する定義の場合は質点の運動と無関係に時間に依存し、かつ質点の運動に伴う座標（一般座標）と運動量（一般運動量）の関数であることを通じても時間に依存する。たとえば運動エネルギー T や角運動量 $\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i$ は時間に直接は依存せず、質点の座標と運動量の変化を通じて時間に依存する。

いずれにせよ時間に依存するので力学変数を一般に $F(t)$ とすると、その時間変化の割合は

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right) \tag{4.79}$$

となる。これに正準方程式 (4.16) を適用すると、

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{4.80}$$

となる。

[13] クレーンやジェットコースターの強度設計のためには、質点の運動の反作用である束縛力の時間変化は知りたいところであろう。量子力学との関係で言えば、系の状態の変化に着目するシュレーディンガー描像と力学量の変化に着目するハイゼンベルク描像の違いに対比される。

いま任意の二つの力学変数 u と v に対し、

$$\{u, v\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \tag{4.81}$$

と書いて、この $\{u, v\}$ のことを u と v の ポアソンの括弧式 または ポアソン括弧（Poisson bracket または Poisson's bracket expression）という。これを使うと (4.80) は

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \tag{4.82}$$

特に F が直接時間に依存しない場合は

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F, H\} \tag{4.83}$$

となる。さらにもし $\{F, H\} = 0$ ならば F は運動の恒量となる。

ところで q と p を定義しなければ (4.81) が計算できないので、本来ポアソンの括弧式は $\{F, H\}_{q,p}$ と書くべきであろう。ところが正準変換（ただし時間に依存しない正準変換）で q, p を Q, P に変換してもポアソンの括弧式は変わらないことが示される。したがってポアソンの括弧式は純粋に二つの力学変数のみで決まる。

［問 4.6］ポアソン括弧式が点変換に対し不変であることを示せ。(応用問題：正準変換に対しても不変であることを示せ。)

ポアソン括弧式の性質をいくつか列挙する。

- $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$,　また異なる i, j に対して　$\{q_i, p_j\} = 0$　(4.84)
- $\{q, p\} = 1 \quad \Rightarrow \quad i, j$ をまとめて　$\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$　(4.85)
- $\{u, c\} = \{c, u\} = 0$　ただし c は定数　(4.86)
- u と v に対し線形（比例則、分配則が成立）　(4.87)
- $\{u, v\} + \{v, u\} = 0$ (交換則不成立)　(4.88)
- $\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0$　(4.89)
- $\{uv, w\} = u\{v, w\} + v\{u, w\}$　(4.90)
- $\frac{\partial}{\partial t}\{u, v\} = \left\{\frac{\partial}{\partial t}u, v\right\} + \left\{u, \frac{\partial}{\partial t}v\right\}$　(4.91)
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{u, v\} = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u, v\right\} + \left\{u, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v\right\}$　(4.92)
- u, v が共に運動の恒量のとき $\{u, v\}$ も運動の恒量。　(4.93)
- $\{u, p_i\} = \frac{\partial u}{\partial q_i}$,　$\{u, q_i\} = -\frac{\partial u}{\partial p_i}$　(4.94)

また

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F, H\}\ , \quad \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2} = \{F, \{F, H\}\}\ , \cdots \tag{4.95}$$

より

$$F(t + \tau) = F(t) + \frac{\tau}{1!}\{F, H\}(t) + \frac{\tau^2}{2!}\{F, \{F, H\}\}(t) + \cdots \tag{4.96}$$

ちなみに、量子力学では上記で時間 t 以外のすべての力学量を通常の数でなく演算子（表現法を決めれば行列となる）として表し、ポアソンの括弧式の代わりに演算子（あるいは行列）の交換子とし、括弧の形を変えて $[u,v] \equiv uv - vu$ と表す。表現法を決めれば u と v は行列になるが、行列では一般に $uv \neq vu$ である。このような規則で (4.82) や (4.83) の代わりに

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F,H]\ , \quad F\text{ が直接時間に依存しない場合は } \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = [F,H] \tag{4.97}$$

としたものはハイゼンベルクの運動方程式と呼ばれる。$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。なお上記のポアソンの括弧式の性質 (4.84)〜(4.93) はそのまま量子力学的交換子にも成り立つ。その証明は、q,p,u,v,w などを正方行列とすればよいので、むしろ量子力学の方が楽なくらいである。

［問 4.7］ (4.84) 以降 13 個の性質を証明せよ。(簡単なものから 1 ページくらいの計算を要するものもあるので、漸次できるものから確かめよ。)

4.3.2　ハミルトン・ヤコビの方程式

調和振動子では変換に次ぐ変換の結果、(4.65) のようにハミルトニアンを 0 にして (4.66) のように位相空間での動きを一点に止めてしまった。これは調和振動子でなくても「運動そのものが正準変換である」ことを考えると一般化できる。一点に止めるということは運動を逆に追うことなので、運動方程式を解くことと同等である。これを実現する母関数が満たすべき方程式を考える。そのような方程式が見つかったとすると、「それを解いて母関数を求める」という新たな問題解法を提供することになる。

たとえば正準変換 II において母関数を $W'(t,q_1,\cdots,q_n,P_1,\cdots,P_n)$ とする。q,p から Q,P への正準変換は (4.48) で与えられる。ハミルトニアン $\tilde{H}$ を 0 にする条件は (4.48) の第一式より

$$\frac{\partial}{\partial t}W'(t,q,P) = -H(t,q,p) \tag{4.98}$$

である。このような W' が見つかったとすると、$\tilde{H} = H + \frac{\partial}{\partial t}W' = 0$ なのだから、正準方程式より $(\mathrm{d}P_i/\mathrm{d}t) = -(\partial\tilde{H}/\partial Q_i) = 0$ となるので P_i を定数に留め置くことができる。その定数を α_i とすると、本来 $t,q_1,\cdots,q_n,P_1,\cdots,P_n$ の関数であった母関数 W' は $t,q_1,\cdots,q_n$ のみの関数となるので、正準変換 (4.48) の二番目の式を用いて (4.98) の右辺の p も q の関数にしてしまうことができる。その結果は

$$\frac{\partial}{\partial t}W'(t,q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = -H\left(t,q_1,\cdots,q_n,\frac{\partial W'}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W'}{\partial q_n}\right) \tag{4.99}$$

となる。これを <u>ハミルトン − ヤコビの偏微分方程式</u>（Hamilton−Jacobi's equation）またはハミルトン − ヤコビの方程式という。そろそろ正準変換 I〜IV ごとに W,W',W'',W''' と書き分ける意味も薄れて来ているので、上式の W' を W と書こう。一般にはそれをハミルトン − ヤコビの偏微分方程式と呼ぶ。この方程式は、母関数となり得る W なら何でも必ず満たさなければならない方程式、ではない。運動方程式を解く代わりに

$\tilde{H}=0$ とするような母関数を求めればよかったので、そのような母関数が満たすべき方程式である。そこでそのような特定の母関数を、W でなく S と書いて、

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t,q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=-H\left(t,q_1,\cdots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n}\right) \tag{4.100}$$

とも書かれる。この S はハミルトンの主関数（Hamilton's principal function）と呼ばれる[14]。後はこの方程式を解いて行けばよいが、この先の計算は、(1)1 次元ポテンシャル中の運動の例、(2) 一般の場合、(3) 中心力場の例で見て行こう。

1 次元ポテンシャル中を動く 1 個の質点

ハミルトニアンは

$$H=\frac{p^2}{2m}+U(x) \tag{4.101}$$

であり、正準変換後の $\tilde{H}$ を 0 とする主関数 $S(t,x)$ が満たすべきハミルトン – ヤコビの方程式は

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}+H\left(x,\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\right)=0 \tag{4.102}$$

である。S は t と x だけでなく、(4.99) における α の自由度が一つあるはずだが、次に現れるエネルギー E がその定数の自由度を担う。いま U が（したがってハミルトニアンが）時間 t に直接依存していないので、エネルギー保存則 $H=\text{const.}\equiv E$ より、

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}=-E \quad\rightarrow\quad S(t,x)=-Et+\text{const.}（ただし\ x\ には依存）\equiv -Et+S(x) \tag{4.103}$$

[14]つまり正準変換の母関数を W とし、それが満たすハミルトン – ヤコビの偏微分方程式の解のことを S と書くのだが、文献や書物によって初めから S と書いたりもしている。

となる[15]。一方 (4.48) の第二式より $p=\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}$ であるから、上式を用いて

$$p=\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}=\sqrt{2m[E-U(x)]}\quad（2\ 番目の等式では\ \frac{p^2}{2m}+U=E\ を用いた。） \tag{4.104}$$

これより $S(x)=\int \mathrm{d}x\sqrt{2m[E-U(x)]}$ となって、

$$S(t,x)=-Et+\int \mathrm{d}x\sqrt{2m[E-U(x)]} \tag{4.105}$$

となり、時間の関数と空間の関数の和となる。二項目の $\mathrm{d}x$ での不定積分に含まれる積分定数は作用の次元を持つので、時間 t の項に $-E(t-t_0)$ の形で繰り込むことができる。この意味で (4.105) の積分定数は時間の原点を t_0 にずらす効果しかない。運動を特徴付けているのは (4.103) の積分定数であるエネルギー E である。

特に $U=0$ の自由粒子の場合は

$$S(t,x)=-Et+\sqrt{2mE}\,x\ +\ 積分定数\ =-Et+px+\text{const.} \tag{4.106}$$

となって、$S(t,x)=\text{const.}$ を保つ時空の点は速度 E/p で伝わる。ちなみに量子力学ではこの式を作用量子 $\hbar$（プランク定数を 2π で割ったもの）で割り i を掛け、$E=\hbar\omega$、$p=\hbar k$ の関係を使って指数関数の指数にし、

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(t,x)\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kx)} \tag{4.107}$$

という平面波で表す。すなわち量子力学において自由粒子のエネルギー E と運動量 p が決まっている場合は、角振動数 $\omega\equiv E/\hbar$、波数 $k\equiv p/\hbar$ の平面波となる。（const. から来る初期位相は省略した。）

[15]ハミルトンの主関数 $S(t,x)$ のうち t に依らない部分を $S(x)$ と書いている。