光の量子状態の空間発展

・k モードの時間発展 → ω モードの空間発展
（ω の決まったレーザービームの空間発展を見る。k は伝搬と共に変わり得る）

・ω（k でもよいが）の確定した無限長ビームのnumber stateとは何か？
→パルスそのものを一つのモードとして扱えないか
（光パルスを多モード展開するのでなく単一モードとして扱いたい）

これと関係して、
・実在共振器と合わないモードを選んだ場合、交換関係が1でなくなる
・その意味は?　それが現れる効果は?

発端・動機

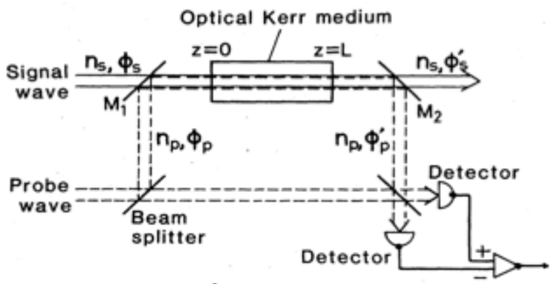
PHYSICAL REVIEW A　　VOLUME 32, NUMBER 4　　OCTOBER 1985

Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect

N. Imoto
NTT Musashino Electrical Communication Laboratories, Nippon Telegraph and Telephone Corporation, Midori-cho 3-9-11, Musashino-shi, Tokyo 180, Japan

H. A. Haus
Department of Electrical Engineering and Computer Science and Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139

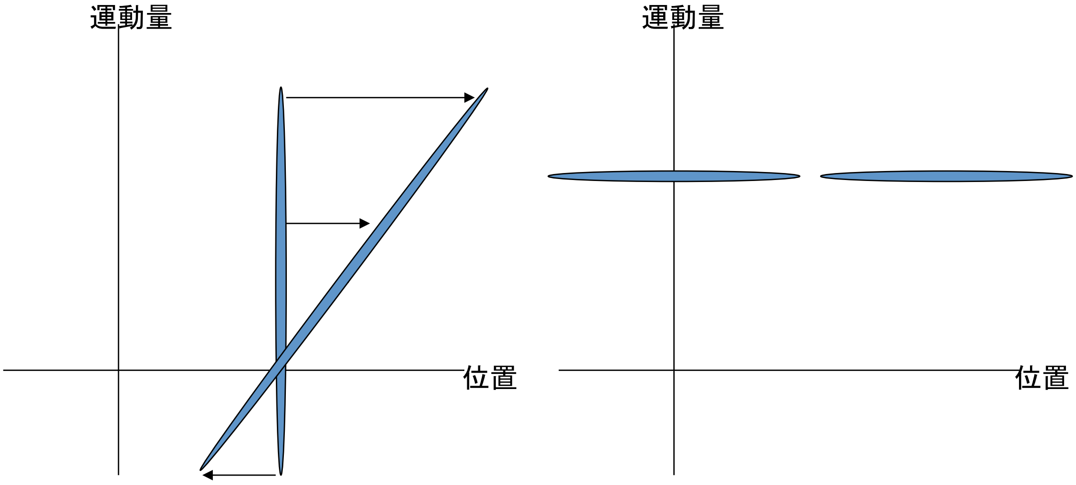
Y. Yamamoto
NTT Musashino Electrical Communication Laboratories, Nippon Telegraph and Telephone Corporation, Midori-cho 3-9-11, Musashino-shi, Tokyo 180, Japan
(Received 30 April 1985)



(a) H_I is a function of A_s,
(b) $[H_I, A_s]=0$,
(c) $[H_I, A_p]\neq 0$, and
(d) H_s is not a function of the conjugate observable of A_s.

?

QND条件(d)は自由粒子を考えるとわかりやすい



位置の測定はその後の位置を不確定にするが、運動量の測定は決まったまま。

「位置」はQND測定不可能。運動量は可能。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$$

$$\hat{p}_x(t) = \hat{p}_x(0)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \frac{\hat{p}_x}{m}t$$

発端・動機

PHYSICAL REVIEW A VOLUME 32, NUMBER 4 OCTOBER 1985

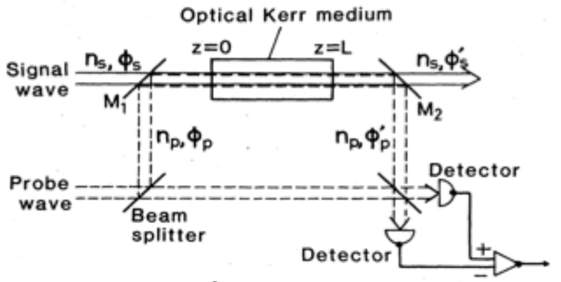
Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect

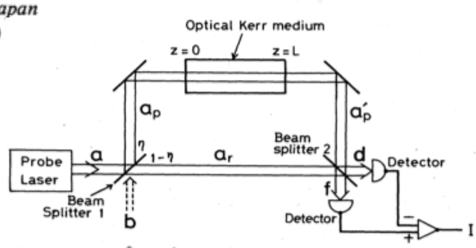
N. Imoto
NTT Musashino Electrical Communication Laboratories, Nippon Telegraph and Telephone Corporation, Midori-cho 3-9-11, Musashino-shi, Tokyo 180, Japan

H. A. Haus
Department of Electrical Engineering and Computer Science and Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139

Y. Yamamoto
NTT Musashino Electrical Communication Laboratories, Nippon Telegraph and Telephone Corporation, Midori-cho 3-9-11, Musashino-shi, Tokyo 180, Japan

(Received 30 April 1985)





(a) H_I is a function of A_s,
(b) $[H_I, A_s]=0$,
(c) $[H_I, A_p]\neq 0$, and
(d) H_s is not a function of the conjugate observable of A_s.

$$H_p=\hbar\omega_p(a_p^\dagger a_p+\tfrac{1}{2}) , \tag{8}$$

$$H_s=\hbar\omega_s(a_s^\dagger a_s+\tfrac{1}{2}) , \tag{9}$$

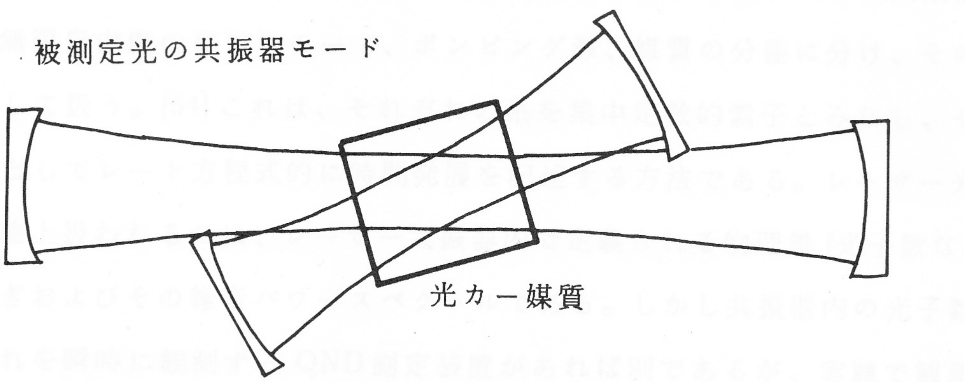
$$H_I=\frac{\hbar^2}{2V\epsilon^2}\omega_p\omega_s\chi^{(3)}a_p^\dagger a_p a_s^\dagger a_s , \tag{10}$$

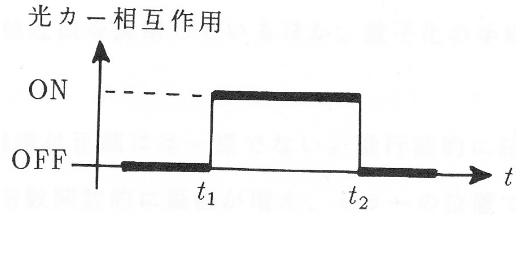
$$A_s=n_s\equiv a_s^\dagger a_s , \tag{11}$$

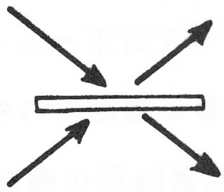
and

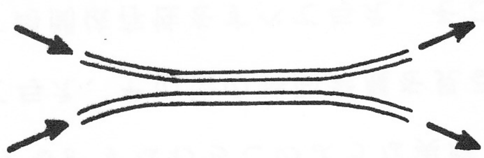
$$A_p=S_p\equiv\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\sqrt{n_p+1}}a_p-a_p^\dagger\frac{1}{\sqrt{n_p+1}}\right] . \tag{12}$$

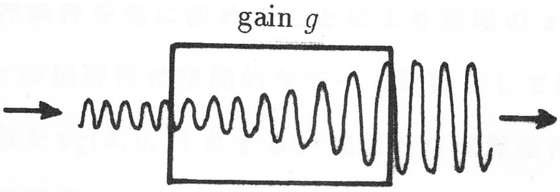
OK!

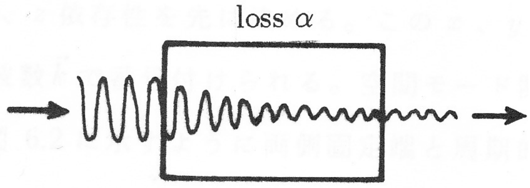


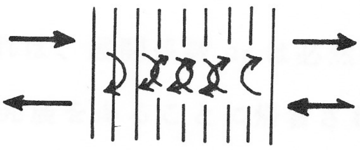


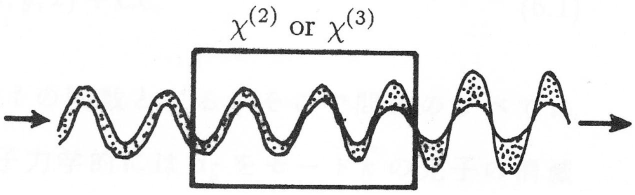


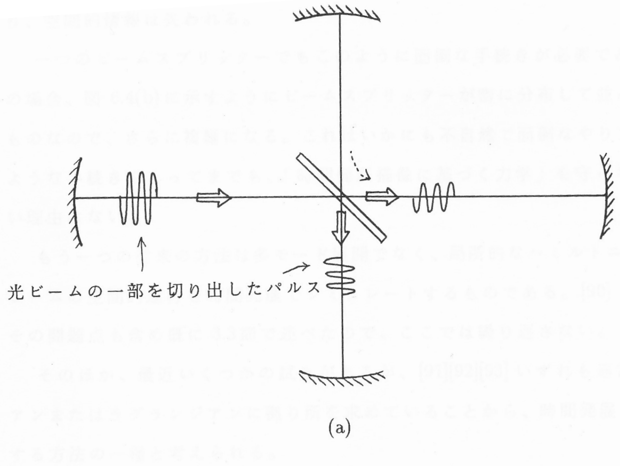




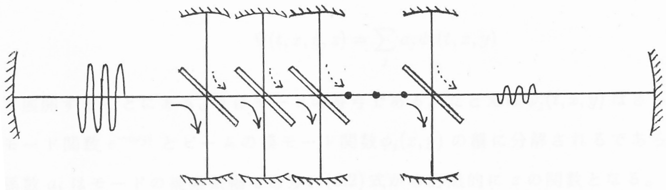




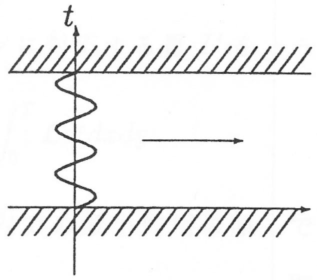
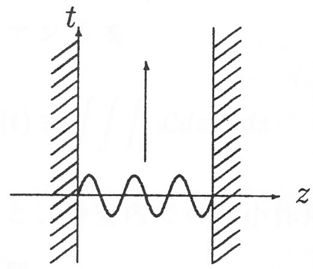




(a)



(b)

	Present theory	Usual theory
	Spatial evolution of time-domain modes	Time evolution of spatial modes
Picture		
Mode suffix (Example)	ω	k
Field expansion	$E = \sum_{\omega} \hat{a}_{\omega}(z)\phi_{\omega}(t,x,y)$	$E = \sum_{k} \hat{a}_{k}(t)\psi_{k}(x,y,z)$
Equation of evolution	$\dfrac{d\hat{A}}{dz} = \dfrac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}, \boxed{?}\right]$	$\dfrac{d\hat{A}}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]$

$$\delta \iiiint \mathcal{L} dt dx dy dz = 0$$

空間発展描像

通常のラグランジアンに対応する量 L' を

$$L'(z) \equiv \iint_A \int_0^T \mathcal{L} dt dx dy$$

で定義すると、時空内での最小作用の原理は変分原理

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} L'(z) dz = 0$$

に書き換えられる。ただし A はビームの断面、T は時間領域でのモードを定義する時間の範囲である。場 Φ をモード $\psi_j(t,x,y)$ で展開した係数を $q_j(z)$ とすると、上記の変分原理は通常のラグランジュの運動方程式に類似の

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial L'}{\partial(\partial q_j/\partial z)}\right] = \frac{\partial L'}{\partial q_j}$$

となる。$q_j(z)$ を基準座標としこれに共役な一般化運動量を

通常の時間発展描像

ラグランジアン L を

$$L(t) \equiv \iiint_V \mathcal{L} dx dy dz$$

で定義すると、時空内での最小作用の原理は変分原理

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt = 0$$

に書き換えられる。ただし V は空間的モードを定義する空間の範囲である。場 Φ をモード $\phi_j(x,y,z)$ で展開した係数を $q_j(t)$ とすると、上記の変分原理はラグランジュの運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial q_j/\partial t)}\right] = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

となる。$q_j(t)$ を基準座標としこれに共役な一般化運動量を

$$p_j'(z) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{(dq_j/dz)}$$

で定義し、L' のルジャンドル変換を

$$I_z \equiv \sum_j q_j p_j' - L'$$

とすれば、上記の運動方程式は

$$\frac{dA}{dz} = \{A, I_z\}$$

という空間発展方程式となる。ただし A は q_j と p_j' の関数で表される物理量、$\{\,,\}$ はポアソンの括弧式に類似のもので、

$$\{A, B\} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_j'} - \frac{\partial A}{\partial p_j'}\frac{\partial I_z}{\partial q_j} \right)$$

である。この I_z は空間発展を生成する関数で、場によって次のようにも書ける。すなわち場 Φ の共役な量 Π を

$$p_j(t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{(dq_j/dt)}$$

で定義し、L のルジャンドル変換を

$$H \equiv \sum_j q_j p_j - L$$

とすれば、上記の運動方程式は

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$$

という空間発展方程式となる。ただし A は q_j と p_j の関数で表される物理量、$\{\,,\}$ はポアソンの括弧式で、

$$\{A, B\} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial I_z}{\partial q_j} \right)$$

である。H は時間発展を生成するハミルトニアンで、場によって次のようにも書ける。すなわち場 Φ の共役な量 Π を

である。この I_z は空間発展を生成する関数で、場によって次のようにも書ける。すなわち場 Φ の共役な量 Π を

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi/\partial z)}$$

とし、$\mathcal{L}$ のルジャンドル変換を

$$\mathcal{I}_z \equiv \Pi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \mathcal{L}$$

とすれば

$$I_z = \iint_A \int_0^T \mathcal{I}_z \, dt\, dx\, dy,$$

となる。基準座標と一般化運動量の間には

$$\{q_j, p_m'\} = \delta_{jm}$$

の交換関係がある。

である。H は時間発展を生成するハミルトニアンで、場によって次のようにも書ける。すなわち場 Φ の共役な量 Π を

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi/\partial t)}$$

とし、$\mathcal{L}$ のルジャンドル変換を

$$\mathcal{H} \equiv \Pi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathcal{L}$$

とすれば

$$H = \iiint_V \mathcal{H} \, dx\, dy\, dz,$$

となる。基準座標と一般化運動量の間には

$$\{q_j, p_m\} = \delta_{jm}$$

の交換関係がある。

一般にラグランジュ関数は一意的ではないが、電磁場よく用いられるのは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0}\sum_{n,m} g^{mm}g^{nn}\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial x^n}\right)^2, \quad (n,m=0,1,2,3) \tag{6.5}$$

である。ただし、g^{nn} は Minkowski's tensor 、Φ_m は四元ベクトルポテンシャルで

$$\begin{pmatrix}\Phi_0\\ \Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\phi/c\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

である。x^n は四元座標で

$$\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}-ct\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix} \tag{6.7}$$

である。共役な場の量は

$$\begin{pmatrix}\Pi_0\\ \Pi_1\\ \Pi_2\\ \Pi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial\Phi_0/\partial z)}\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial\Phi_1/\partial z)}\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial\Phi_2/\partial z)}\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial\Phi_3/\partial z)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial z}\\ -(1/\mu_0)(\partial A_x/\partial z)\\ -(1/\mu_0)(\partial A_y/\partial z)\\ -(1/\mu_0)(\partial A_z/\partial z)\end{pmatrix} \tag{6.8}$$

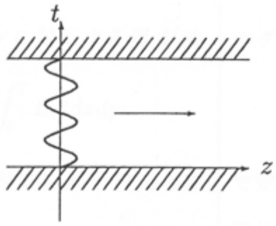
で表される。これらの表式を用いると $\mathcal{I}_z$ が Maxwellのテンソルの (z,z) 成分 T_{zz} であることおよび $\mathcal{H}$が (t,t) 成分 T_{tt} であることが容易に確かめられる。電磁場を用いて表現すると、

$$T_{zz} = E_zD_z + H_zB_z - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})\text{および} \tag{6.9}$$

$$T_{tt} = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}) \tag{6.10}$$

となる。これらから、もし TEM_{00} 波のように場の z 成分が無い場合、$T_{zz}=-T_{tt}$ が結論される。従ってさらにこれらのエネルギー密度が時空内で一様と仮定すると、$L=cT$ として

$$\hat{I}_z \equiv \iint_A\int_0^T T_{zz}dtdxdy = \iint_A\int_0^L T_{tt}dxdydz = -\frac{\hat{H}}{c} \tag{6.11}$$



$$A(t,x,y,z) = \underbrace{u(x,y)}_{\text{横モード}}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}_{\omega\text{モード}}\tilde{a}(z)$$

$$\frac{d}{dz}\tilde{a} = \{\tilde{a}, I_z\}$$

真空中では $\tilde{a}(z) = \tilde{a}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\omega z}$

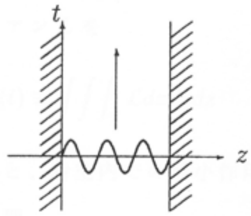
$$\rightarrow \quad A(t,x,y,z) = u(x,y)\tilde{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_\omega z)}$$

媒質中では

$$A(t,x,y,z) = u(x,y)\underbrace{\tilde{A}(z)}_{\text{Slowly varing}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_\omega z)}$$

このように解く人は全くいない。(I_zなるものが知られていないから)

問題設定($z = 0$で ω の光ビームを発生したとき $z = z_0$でどうなっているか?)はよくある。



$$A(t,x,y,z) = \underbrace{u(x,y)}_{\text{横モード}}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}_{k\text{モード}}\tilde{a}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{a} = \{\tilde{a}, H\}$$

真空中では $\tilde{a}(t) = \tilde{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}$

$$\rightarrow \quad A(t,x,y,z) = u(x,y)\tilde{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - kz)}$$

媒質中では

$$A(t,x,y,z) = u(x,y)\underbrace{\tilde{A}(t)}_{\text{Slowly varing}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - kz)}$$

このように解く人はいるかもしれないが、古典の問題ではMaxwell方程式から直接解くのが普通。

問題設定($t = 0$で k の光の場を発生したとき $t = t_0$でどうなっているか?)はあまりない。

ノイズパワースペクトルの測定 .

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{\hbar k_0}{2\varepsilon AT}}e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)}\left[\alpha_0 + \sum_{\Omega \neq 0}\hat{A}_\Omega e^{-i(\Omega t - Kz)}\right] + \mathrm{H.c}$$

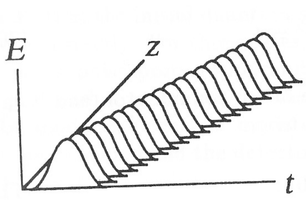
$$\hat{I} = \beta\overline{\int_A dxdy\hat{E}^2}\,, \qquad \hat{I} = I_0 + \sum_\Omega \hat{I}(\Omega) \qquad I_0 = \frac{\beta\hbar k_0 n_0}{\varepsilon T}$$

$$\hat{I}(\Omega) = \frac{\beta\hbar k_0}{\varepsilon T}(\alpha_0^*\hat{A}_\Omega + \alpha_0\hat{A}^\dagger_{-\Omega})e^{-i(\Omega t - Kz)} + \mathrm{H.c.}$$

$$P_\Omega = \frac{1}{T}\int_T dt \;\; R\langle\hat{I}^2(\Omega)\rangle$$

$$\begin{aligned} P(f) &= 2\left(\frac{\beta\hbar k_0}{\varepsilon}\right)^2\frac{n_0}{T}R\left\langle\hat{A}^\dagger_\Omega\hat{A}_\Omega + \hat{A}^\dagger_{-\Omega}\hat{A}_{-\Omega} + 1\right\rangle \\ &= 2\left(\frac{\beta\hbar k_0}{\varepsilon}\right)^2\frac{n_0}{T}R\,. \end{aligned}$$

$$P(f) = 2eIR$$



(a)

$$A(t,x,y,z)=\underbrace{u(x,y)}_{\text{横モード}}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}_{\omega\text{モード}}\tilde{a}(z)$$

$$\frac{d}{dz}\tilde{a}=\{\tilde{a},I_z\}$$

真空中では　$\tilde{a}(z)=\tilde{a}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\omega z}$

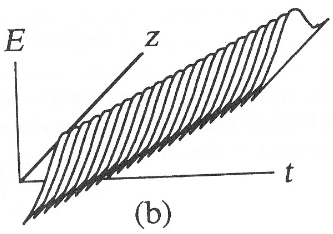
$\rightarrow\quad A(t,x,y,z)=u(x,y)\tilde{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-k_\omega z)}$

媒質中では

$$A(t,x,y,z)=u(x,y)\underbrace{\tilde{A}(z)}_{\text{Slowly varing}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-k_\omega z)}$$

このように解く人は全くいない。(I_zなるものが知られていないから)

問題設定($z=0$で ω の光ビームを発生したとき $z=z_0$でどうなっているか?)はよくある。



(b)

$$A(t,x,y,z)=\underbrace{u(x,y)}_{\text{横モード}}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}_{k\text{モード}}\tilde{a}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}=\{\tilde{a},H\}$$

真空中では　$\tilde{a}(t)=\tilde{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}$

$\rightarrow\quad A(t,x,y,z)=u(x,y)\tilde{a}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t-kz)}$

媒質中では

$$A(t,x,y,z)=u(x,y)\underbrace{\tilde{A}(t)}_{\text{Slowly varing}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t-kz)}$$

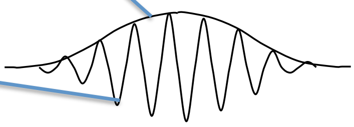
このように解く人はいるかもしれないが、古典の問題ではMaxwell方程式から直接解くのが普通。

問題設定($t=0$で k の光の場を発生したとき $t=t_0$でどうなっているか?)はあまりない。

郡速度の表式 (ωモードの空間伝搬で説明される古典論の例)

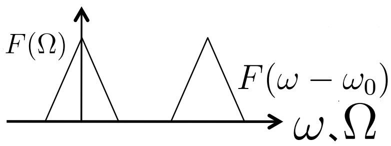
郡速度が $\frac{d\omega}{dk}$ であることを示す。
波動 $f(t,x)$ が $x=0$ 地点で搬送波 (carrier)$e^{-i\omega_0 t}$ と包絡線 (envelope)$F(t)$ の積とする。

$$f(t,0)=e^{-i\omega_0 t}F(t)$$



$F(t)$ の Fourier 変換を $F(\Omega)$ すなわち

$$F(t)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int d\Omega F(\Omega)e^{-i\Omega t}$$



とすれば、$\omega\equiv\omega_0+\Omega$ として

$$f(t,0)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int d\omega F(\omega-\omega_0)e^{-i\omega t}$$

波数 k は ω の関数とする。x だけ波が進んだ地点では各成分 $e^{-i\omega t}$ は$e^{-i(\omega t-kx)}$ となるので

$$f(t,x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int d\omega F(\omega-\omega_0)e^{-i(\omega t-kx)}$$

中心振動数 ω_0 のまわりに k をテイラー展開して

$$k(\omega)=k(\omega_0)+k'(\omega_0)(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}k''(\omega_0)(\omega-\omega_0)^2+\cdots$$

ただし $'$ は ω に関する微分。(5.21) を (5.20) に代入すると

$$k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \cdots$$

ただし $'$ は ω に関する微分。

$$\begin{aligned}
f(t,x) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int d\omega F(\omega - \omega_0) \exp\left[-i\left(\omega_0 t + (\omega - \omega_0)t - k(\omega_0)x - k'(\omega_0)(\omega - \omega_0)x - \frac{1}{2}k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 - \cdots\right)\right] \\
&= e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int d\omega F(\omega - \omega_0) \exp\left[-i\left((\omega - \omega_0)t - k'(\omega_0)(\omega - \omega_0)x - \frac{1}{2}k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 - \cdots\right)\right] \\
&= e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int d\omega F(\omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)[t - k'(\omega_0)x]} \exp\left(\frac{i}{2}k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 - \cdots\right) \\
&= e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int d\Omega F(\Omega) e^{-i(\Omega)[t - k'_0 x]} \exp\left(\frac{i}{2}k''_0 \Omega^2 - \cdots\right)
\end{aligned}$$

ただし $k(\omega_0)$ を k_0 などとおいた。最後の exp の項は分散による波形変形。これを（すなわち $k''_0\Omega$ 以下を）無視できるとすれば

$$\begin{aligned}
f(t,x) &= e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int d\Omega F(\Omega) e^{-i(\Omega)(t - k'_0 x)} \\
&= e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} F(t - k'_0 x)
\end{aligned}$$

いま

$$v_p \equiv \frac{\omega_0}{k_0}, \quad v_g \equiv \left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k_0}$$

とおけば、

$$f(t,x) = e^{-ik_0(t - x/v_p)} F(t - x/v_g)$$

→ v_p と v_g はそれぞれ位相速度と郡速度を意味する。

量子化に向けて、話を戻すと‥‥

数で、場によって次のようにも書ける。すなわち場 Φ の共役な量 Π を

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi/\partial z)}$$

とし、$\mathcal{L}$ のルジャンドル変換を

$$\mathcal{I}_z \equiv \Pi \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \mathcal{L}$$

とすれば

$$I_z = \iint_A \int_0^T \mathcal{I}_z \, dt\, dx\, dy,$$

となる。基準座標と一般化運動量の間には

$$\{q_j, p'_m\} = \delta_{jm}$$

の交換関係がある。

トニアンで、場によって次のようにも書ける。すなわち場 Φ の共役な量 Π を

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi/\partial t)}$$

とし、$\mathcal{L}$ のルジャンドル変換を

$$\mathcal{H} \equiv \Pi \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \mathcal{L}$$

とすれば

$$H = \iiint_V \mathcal{H} \, dx\, dy\, dz,$$

となる。基準座標と一般化運動量の間には

$$\{q_j, p_m\} = \delta_{jm}$$

の交換関係がある。

量子化仮説

$$[\hat{q}_j, \hat{p}'_m] = i\hbar\delta_{jm}$$

または

$$[\hat{\Phi}(z), \hat{\Pi}(z')] = i\hbar\delta(z' - z)$$

で置き換えられる。運動方程式は

$$\frac{d\hat{A}}{dz} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{I}_z]$$

となる。$\hat{I}_z$ を空間発展生成演算子と呼ぶことにする。

電磁場の場合、後に示すように $\mathcal{I}_z$ は Maxwellのエネルギー・モーメンタムテンソルの zz 成分に等しい。第二量子化した電磁場をそれに代入することにより、真空中では

$$\hat{I}_z = -\sum_j \hbar k_j \left[\hat{n}_j(z) + \frac{1}{2}\right]$$

量子化仮説

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_m] = i\hbar\delta_{jm}$$

または

$$[\hat{\Phi}(t), \hat{\Pi}(t')] = i\hbar\delta(t' - t)$$

で置き換えられる。運動方程式は

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]$$

となる。$\hat{H}$ は系のハミルトニアンである。

電磁場の場合、後に示すように $\mathcal{H}$ は Maxwellのエネルギー・モーメンタムテンソルの tt 成分に等しい。第二量子化した電磁場をそれに代入することにより、真空中では

$$\hat{H} = \sum_j \hbar\omega_j \left[\hat{n}_j(t) + \frac{1}{2}\right]$$

古典の電気回路、ミリ波マイクロ波、光通信の人達はごく自然に
「k モードの時間発展」でなく「ωモードの空間伝搬」を使っている。

物理でも、暗黙のうちに「k モード」でなく「ωモード」を使っている人はたくさんいる。

霜田光一、高橋秀俊、Loudon、Mandel

2-mode squeezing: Shoemaker & Caves

t か z かの発展だけでなく観測も・・・

そもそも k を分解して見る装置は少ない。（グレーティングくらい）
瞬時に観測する装置はまずない。

光ディテクターも原子も、特定の z に置かれ、ω を見ている。
観測は時間をかけて（量子化時間）、位置的に一点で行われる。

実際の使い方

$$\hat{E}(t,x,y,z)=\sum_{\omega}\sqrt{\frac{\hbar k_{\omega}}{2\varepsilon_{\omega}T}}\;e^{-i\omega t}[\hat{a}_{\omega}(z)\psi_{\omega}(x,y)+\mathrm{H.c.}]$$

$$\hat{E}(t,x,y,z)=\sum_{\omega}\sqrt{\frac{\hbar k_{\omega}}{2\varepsilon_{\omega}AT}}\;e^{-i\omega t}[\hat{a}_{\omega}(z)+\mathrm{H.c.}]$$

$$\frac{d}{dz}\hat{a}_{\omega}(z)=\frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_{\omega}(z),\hat{I}_z(z)]$$

$$\hat{I}_z=\int\!\!\int dxdy\int_0^T dt\left[\hat{E}_z\hat{D}_z+\hat{H}_z\hat{B}_z-\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{D}}+\hat{\boldsymbol{H}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})\right]$$

$$\hat{a}_{\omega}(z)=e^{ik_{\omega}z}\hat{a}_{\omega}(0)$$

$$\hat{I}_0=-\sum_{\omega}\hbar k_{\omega}\left(\hat{a}_{\omega}^{\dagger}\hat{a}_{\omega}+\frac{1}{2}\right)$$

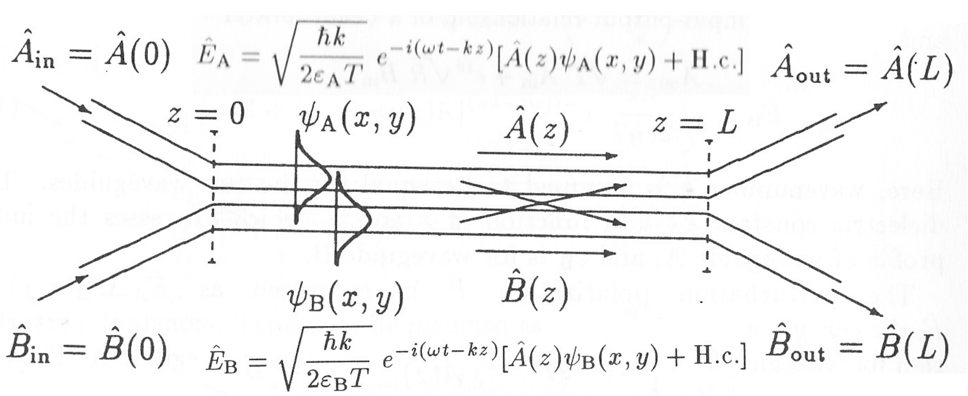
媒質中→ $\hat{a}_{\omega}(z)=e^{ik_{\omega}z}\hat{A}_{\omega}(z)$

$$\hat{E}(t,x,y,z)=\sum_{\omega}\sqrt{\frac{\hbar k_{\omega}}{2\varepsilon_{\omega}T}}\;e^{-i(\omega t-k_{\omega}z)}[\hat{A}_{\omega}(z)\psi_{\omega}(x,y)+\mathrm{H.c.}]$$

$$\hat{I}_z=\hat{I}_0+\hat{I}_{\mathrm{int}}\qquad \frac{d}{dz}\hat{A}_{\omega}(z)=\frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_{\omega}(z),\hat{I}_{\mathrm{int}}(z)]$$

$$\hat{I}_{\mathrm{int}}=\int\!\!\int\!\!\int_0^T\left(E_zP_z-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P}\right)dtdxdy$$

方向性結合器



$$\hat{P}=e^{-i(\omega t-kz)}\left[\sqrt{\frac{\hbar k}{2\varepsilon_{\mathrm{A}}T}}\;\hat{A}(z)\psi_{\mathrm{A}}(x,y)\Delta\varepsilon_{\mathrm{B}}(x,y)+\sqrt{\frac{\hbar k}{2\varepsilon_{\mathrm{B}}T}}\;\hat{B}(z)\psi_{\mathrm{B}}(x,y)\Delta\varepsilon_{\mathrm{A}}(x,y)+\mathrm{H.c.}\right]$$

$$\hat{I}_{\mathrm{int}}=\hbar\kappa\hat{A}^{\dagger}\hat{B}+\hbar\kappa^{*}\hat{A}\hat{B}^{\dagger}$$

$$\kappa\equiv k\int\!\!\int[\psi_{\mathrm{A}}^{*}(x,y)\Delta\varepsilon_{\mathrm{B}}(x,y)\psi_{\mathrm{B}}(x,y)+\psi_{\mathrm{B}}^{*}(x,y)\Delta\varepsilon_{\mathrm{A}}(x,y)\psi_{\mathrm{A}}(x,y)]\,dxdy$$

$$\frac{d}{dz}\hat{A}=-i\kappa\hat{B}\quad\text{and}\quad\frac{d}{dz}\hat{B}=-i\kappa^{*}\hat{A}$$

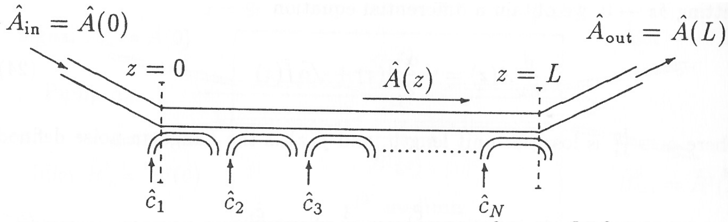
$$\hat{A}(z)=\hat{A}(0)\cos(|\kappa|z)-\frac{i\kappa}{|\kappa|}\hat{B}(0)\sin(|\kappa|z)$$

$$\hat{B}(z)=\hat{B}(0)\cos(|\kappa|z)-\frac{i\kappa^{*}}{|\kappa|}\hat{A}(0)\cos(|\kappa|z)$$

（ビームスプリッターのモデル）

集中損失 $\hat{A}_{\mathrm{out}}=\sqrt{T}\;\hat{A}_{\mathrm{in}}+i\sqrt{1-T}\;\hat{F}$

分布損失



$$\hat{A}(z+\delta z) = \sqrt{1-\delta\eta}\ \hat{A}(z) + \sqrt{\delta\eta}\ \hat{c}_j \simeq \left(1 - \frac{\delta\eta}{2}\right)\hat{A}(z) + \sqrt{\delta\eta}\ \hat{c}_j$$

$$\frac{d}{dz}\hat{A}(z) = -\frac{\alpha}{2}\hat{A}(z) + \sqrt{\alpha}\hat{f}(z)$$

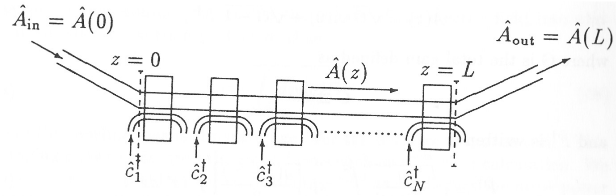
$$\hat{f}(z) \equiv \lim_{\delta z\to 0}\frac{\hat{c}_j}{\sqrt{\delta\eta}} = \frac{1}{|\kappa|}\lim_{\delta z \to 0}\frac{\hat{c}_j}{\sqrt{\delta z}}$$

$$[\hat{f}(z), \hat{f}^\dagger(z')] = \delta(z'-z)$$

$$\hat{A}(z) = \sqrt{T}\ \hat{A}(0) + \sqrt{1-T}\ \hat{F} \qquad \hat{F} \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha z}}}\int_0^z \exp\left[-\frac{\alpha(z-z')}{2}\right]\hat{f}(z')dz'$$

（1箇所に集中損失があるのと同じ）

分布増幅



$$\hat{A}(z+\delta z) = \sqrt{G'}\ \hat{A}(z) + \sqrt{G'-1}\ \hat{f}_j \simeq \left(1 + \frac{G'-1}{2}\right)\hat{A}(z) + \sqrt{G'-1}\ \hat{f}_j^\dagger$$

$$\frac{d}{dz}\hat{A}(z) = \frac{g}{2}\hat{A}(z) + \sqrt{g}\hat{f}^\dagger(z)$$

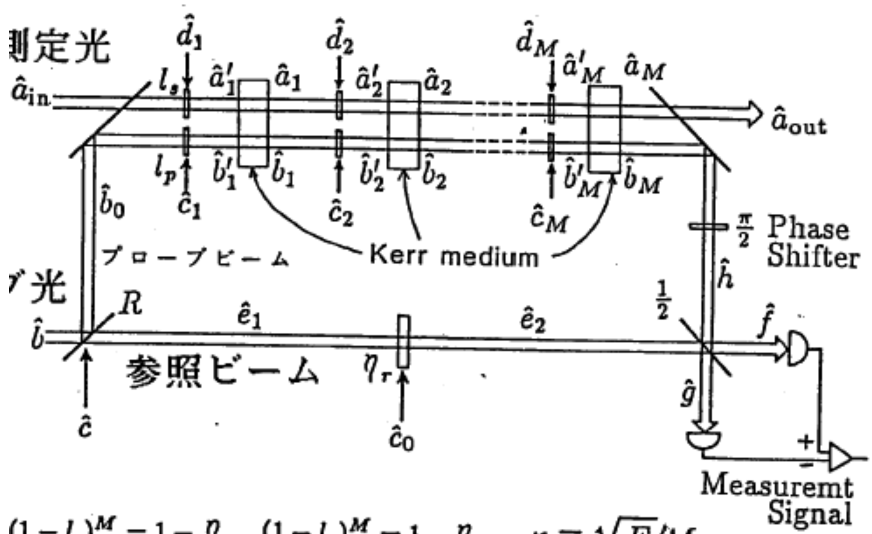
$$\hat{f}^\dagger(z) \equiv \lim_{\delta z\to 0}\frac{\hat{f}_j^\dagger}{\sqrt{G'-1}} = \frac{1}{|\kappa|}\lim_{\delta z\to 0}\frac{\hat{f}_j^\dagger}{\sqrt{\delta z}} .$$

$$\hat{A}(z) = \sqrt{G}\ \hat{A}(0) + \sqrt{G-1}\ \hat{F}^\dagger \qquad G \equiv e^{gz}$$

$$\hat{F}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{g}{e^{gz}-1}}\int_0^z \exp\left[\frac{g(z-z')}{2}\right]\hat{f}^\dagger(z')dz' .$$

（1箇所に集中増幅があるのと同じ）

非線形光学と光損失が連続的に分布する媒質の解析モデル



$$(1-l_s)^M = 1-\eta \qquad (1-l_p)^M = 1-\eta_p \qquad \kappa \equiv \sqrt{F}/M$$

$$\hat{a}_n = (\sqrt{1-l_s}\hat{a}_{n-1} + \sqrt{l_s}\hat{d}_n)\exp\left\{i\kappa[(1-l_p)\hat{b}^\dagger_{n-1}\hat{b}_{n-1} + l_p\hat{c}^\dagger_n\hat{c}_n + \sqrt{l_p(1-l_p)}(\hat{b}^\dagger_{n-1}\hat{c}_n + \hat{c}^\dagger_n\hat{b}_{n-1})]\right\}$$

$$\hat{b}_n = (\sqrt{1-l_p}\hat{b}_{n-1} + \sqrt{l_p}\hat{c}_n)\exp\left\{i\kappa[(1-l_s)\hat{a}^\dagger_{n-1}\hat{a}_{n-1} + l_s\hat{d}^\dagger_n\hat{d}_n + \sqrt{l_s(1-l_s)}(\hat{a}^\dagger_{n-1}\hat{d}_n + \hat{d}^\dagger_n\hat{a}_{n-1})]\right\}$$

$$\Delta = \frac{1}{F\langle\hat{n}_{\rm in}\rangle\langle\hat{n}_{\rm p}\rangle}\left[\frac{\ln(1-\eta)}{\eta}\right]^2\frac{1}{(1-\eta_{\rm p})} + \frac{\eta(2-\eta)+2(1-\eta)\ln(1-\eta)}{\eta^2}$$

完全単色モード ←→ 瞬間パルスモード

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega-\omega') \qquad \hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\, \hat{a}(\omega)e^{-i\omega t}$$

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t')] = \delta(t-t')$$

任意のパルスモード

$$\hat{a}^\dagger(\xi) \equiv \int d\omega\ \xi(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega)\ ,= \int dt\ \xi(t)\hat{a}^\dagger(t)$$

ただし $\int d\omega|\xi(\omega)|^2 = \int dt|\xi(t)|^2 = 1$

$$|n;\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,[\hat{a}^\dagger(\xi)]^n\,|0\rangle$$

$$|\alpha;\xi\rangle \equiv \exp\left[\alpha\hat{a}^\dagger(\xi) - \alpha^*\hat{a}^\dagger(\xi)\right]|0\rangle$$

$$\hat{a}|\alpha;\xi\rangle = \alpha|\alpha;\xi\rangle$$

交換関係 $[\hat{a}[\xi], \hat{a}^\dagger[\zeta]] = \int dk\ \xi^*(k)\ \zeta(k) = \int dz\ \xi^*(z)\ \zeta(z)$

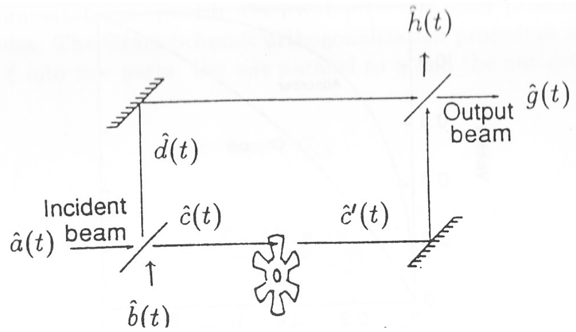
PHYSICAL REVIEW A VOLUME 45, NUMBER 3 1 FEBRUARY 1992

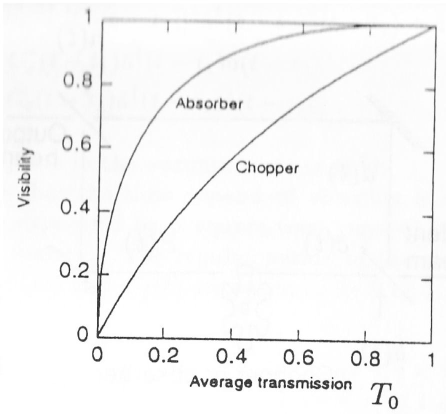
Quantum theory of dynamic interference experiments

N. Hussain
Physics Department, Essex University, Colchester CO4 3SQ, England

N. Imoto
NTT Basic Research Labs., 3-9-11 Midori-cho, Musashino-shi, Tokyo 180, Japan

R. Loudon
Physics Department, Essex University, Colchester CO4 3SQ, England
(Received 23 May 1991)





$$v = \frac{2T_0}{1+T_0}\int dt\ |\xi_0(t-t_1)\xi_0^\dagger(t-t_2)|^2\,.$$

This is compared to the fact that the visibility is given by

$$v = \frac{2\sqrt{T_0}}{1+T_0}\int dt\ |\xi_0(t-t_1)\xi_0^\dagger(t-t_2)|^2\,.$$

PHYSICAL REVIEW A VOLUME 50, NUMBER 1 JULY 1994

Anomalous commutation relation and modified spontaneous emission inside a microcavity

Masahito Ueda and Nobuyuki Imoto
NTT Basic Research Laboratories, Morinosato-Wakamiya, Atsugi-shi, Kanagawa 243-01, Japan

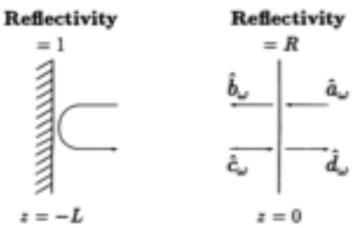
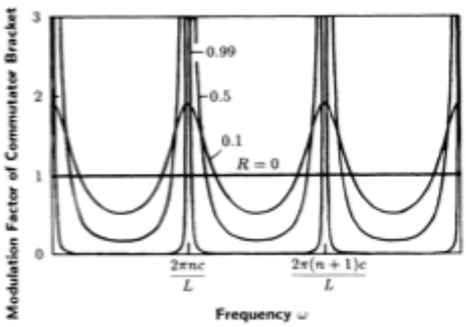


FIG. 1. Microcavity and field operators.

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}^\dagger_{\omega'}] = \delta(\omega'-\omega)$$
$$\hat{b}_\omega\, e^{ikL} = -\hat{c}_\omega\, e^{-ikL}$$
$$\hat{b}_\omega = \mathbf{t}\hat{a}_\omega + \mathbf{r}\hat{c}_\omega$$
$$\hat{d}_\omega = \mathbf{t}\hat{c}_\omega + \mathbf{r}\hat{a}_\omega$$
$$|\mathbf{t}|^2 + |\mathbf{r}|^2 = 1 \quad \text{and} \quad \mathbf{t}^*\mathbf{r} + \mathbf{r}^*\mathbf{t} = 0$$
$$\mathbf{t} = i\sqrt{1-R} \quad \text{and} \quad \mathbf{r} = -\sqrt{R}$$

$$\left\{\begin{aligned} \hat{b}_\omega &= \frac{i\sqrt{1-R}}{1-\sqrt{R}e^{2ikL}}\,\hat{a}_\omega \\ \hat{c}_\omega &= \frac{-i\sqrt{1-R}}{e^{-2ikL}-\sqrt{R}}\,\hat{a}_\omega \\ \hat{d}_\omega &= \frac{1-\sqrt{R}e^{-2ikL}}{e^{-2ikL}-\sqrt{R}}\,\hat{a}_\omega \end{aligned}\right.$$

$$[\hat{d}_\omega, \hat{d}^\dagger_{\omega'}] = [\hat{a}_\omega, \hat{a}^\dagger_{\omega'}] \qquad [\hat{b}_\omega, \hat{b}^\dagger_{\omega'}] = [\hat{c}_\omega, \hat{c}^\dagger_{\omega'}] = \frac{1-R}{1-2\sqrt{R}\cos(2\omega L/c)+R}\,\delta(\omega'-\omega)$$



Cavityの中でωモード（無限に長い波束）
を考えたからこういうことが起こる。

→ 1. そういうモードは外に取り出せないのではないか?
（強引に取り出そうとすると、ノーマルなものに変わる?）
2. 異常な交換関係の値が見える現象はないか?
3. Cavityより短い波束ﾓｰﾄﾞだったら異常は起こらない?

→ 1. そういうモードは外に取り出せないのではないか?
（強引に取り出そうとすると、ノーマルなものに変わる?）
2. 異常な交換関係の値が見える現象はないか?

3. Cavityより短い波束ﾓｰﾄﾞだったら異常は起こらない?

$$\hat{a}_t \equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{a}_\omega \qquad [\hat{a}_t, \hat{a}^\dagger_{t'}] = \delta(t'-t) \qquad [\hat{d}_t, \hat{d}^\dagger_{t'}] = [\hat{a}_t, \hat{a}^\dagger_{t'}] = \delta(t'-t)$$

$$[\hat{b}_t, \hat{b}^\dagger_{t'}] = [\hat{c}_t, \hat{c}^\dagger_{t'}] = \delta(t'-t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{R^n}\,\delta\left(t'-t-\frac{2nL}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{R^n}\,\delta\left(t'-t+\frac{2nL}{c}\right)$$

2. 異常な交換関係の値が見える現象はないか?

［1］特定のωに共鳴する原子を置いたら？

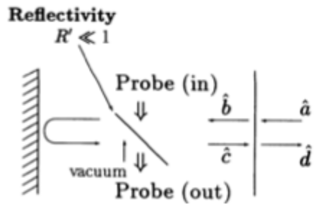
$$\hat{E}^2 = \left\{ i \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 c A}} \left[\hat{b}_\omega e^{-i\omega(t+z/c)} + \hat{c}_\omega e^{-i\omega(t-z/c)} \right] + \text{H.c.} \right\}^2$$

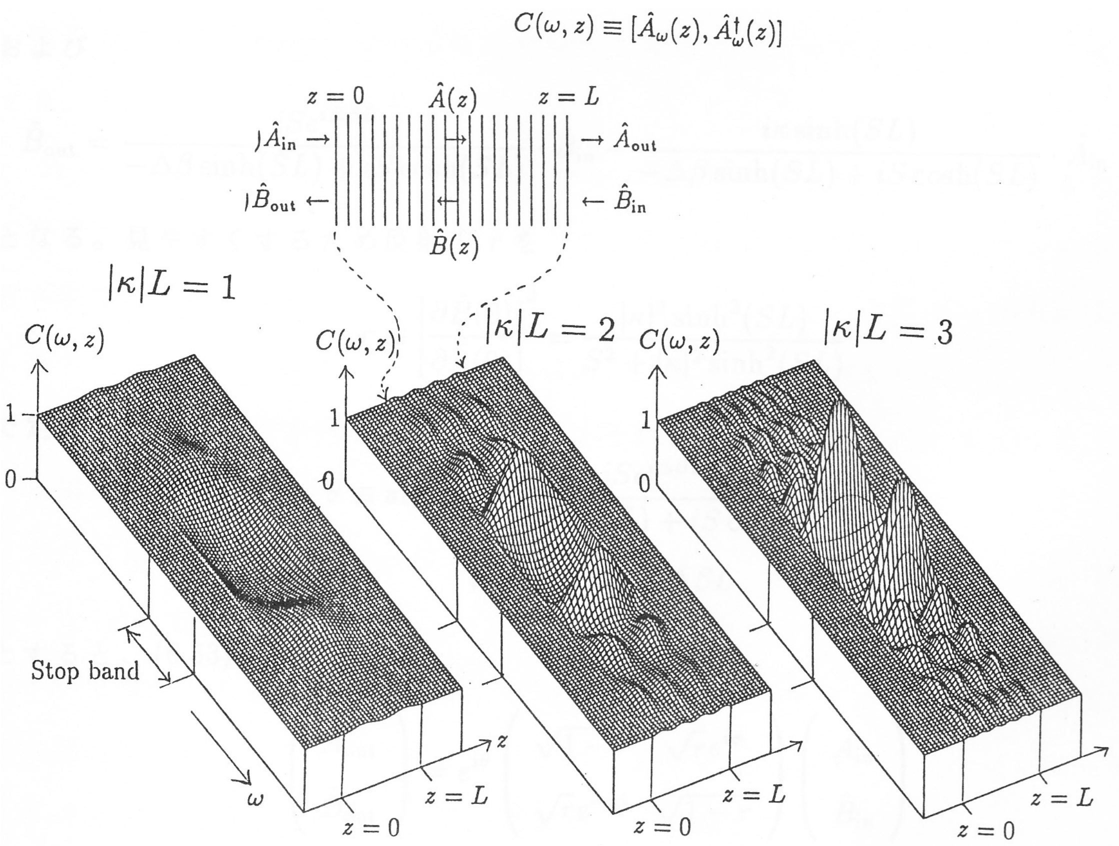
$$= \frac{\hbar}{2\pi\epsilon_0 c A} \int d\omega d\omega' \sqrt{\omega\omega'} \left\{ \hat{b}^\dagger_\omega \hat{b}_{\omega'} + \frac{1}{2}[\hat{b}_\omega, \hat{b}^\dagger_{\omega'}] \right\} \times [1 - e^{2i\omega(z+L)/c}] \times [1 - e^{-2i\omega'(z+L)/c}]$$

$$F = \frac{1-R}{1-2\sqrt{R}\cos(2\omega L/c)+R} \sin^2[\omega(z+L)/c] \qquad F = \frac{1+\sqrt{R}}{1-\sqrt{R}}\frac{1}{2} \cong \frac{1}{1-\sqrt{R}}$$

［2］反射率の低いビームスプリッターで外に取り出したら？

$$F' \equiv \frac{R'_{\text{eff}}}{R'} = \frac{1-R}{1+R-2\sqrt{R}\cos(2\omega L/c)}$$





まとめ

・個々の光パルスにつき、「そのパルスの形状をもった」光子の生成演算子を構成できる。

・御利益：多モード展開することなく、「そのパルス」を単一モードとして扱える。

・応用：干渉、相互作用、検出時のモード不一致の量子効果を計算できる。

例：高速チョッパーと吸収体では、同じ透過率でも異なる影響を持つ。

・現存する境界条件と合わないモードの選択の効果を計算できる。

例：共振器のround trip timeより長い波束モードに対する異常な交換関係
→ 自然放出制御（cavity quantum electrodynamics）や、BSのみかけの反射率の変化として現れる。

・ωを決めたビームの伝搬については、空間発展演算子が便利である。（古典論の範囲）

・ωを決めたとき、モード間のミキシングなしに空間発展を記述できる。
（モード毎に分離されるのはエネルギーでなく空間発展演算子）

・ωを決めたビームの伝搬の量子力学的記述は、空間発展描像が便利である。
・時間的に定常な空間発展を、時間発展描像で解析するのは困難。
・k でなく ω を見ている検出器も自然に記述。

References (当日挙げていませんでしたが要望があったので加えました)

［Cross-Kerr modulationを使った光子数の量子非破壊測定の提案］

[1] "Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect," N. Imoto, H. A. Haus, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A32, No. 4, p.2287, (1985). （D論の主論文の一つ。通常の「kモードの時間発展」の形式で書かれています）

［ωモードの空間発展のメインの発表］

[2] "Interchanging time and space in quantum mechanics for analyzing spatial evolution of an optical beam," N. Imoto, in Proceedings of the Third International Symposium on Foundation of Quantum Mechanics (ISQM-Tokyo'89), 28-30 August 1989, ed. S-I. Kobayashi et al., The Physical Society of Japan, 1990, ISBN4-89027-003-5 C3042, pp.306-314.（cavity内に異常な交換関係が現れることにも触れている）
ここまではＤ論に書いてあります。

[3] "Quantum mechanical treatment of a propagating optical beam," (co-authored by J. Jeffers, and R. Loudon) NATO Advanced Research Workshop on Quantum Measurements in Optics, Cortina d'Ampezzo, Italy, January 21-25, 1991/Proceedings: Quantum Measurement in Optics edited by P. Tombesi and D. F. Walls (Plenum Press, New York, 1992) pp.295-311.

［応用］

[4] "Quantum theory of dynamic interference experiments," N. Hussain, N. Imoto, and R. Loudon, Phys. Rev. A45, p.1987, (1992).（ﾁｮｯﾊﾟｰvs吸収体）

[5] "Quantum optics of traveling-wave attenuators and amplifiers," J. Jeffers, N. Imoto, and R. Loudon, Phys. Rev. A47, p.3346, (1993).

［[2]〜[5]のまとめ］

[6] "Quantum Effects of Spatial/Temporal Modulation of the Optical Field," N. Imoto, in Quantum Optical Phenomena in Spatially Confined Materials (Proceedings of the 6th NEC Symposium on Fundamental Approaches to New Material Phases, Karuizawa, Japan, Oct. 13-17, 1996), ed. K. Cho et al., reprinted from Materials Science and Engineering B, B48, Nos. 1-2, Elsevier, 1997, pp.34-38.（多モード直交関係：k一定のときﾓｰﾄﾞ間ｸﾛｽﾄｰｸがないのはﾊﾐﾙﾄﾆｱﾝで、ω一定のときはIzであることの記述あり）

[7] "Coupled-Mode and Mode-Conversion Theory in Quantum Optics," N. Imoto, in Quantum Physics, Chaos Theory, and Cosmology, AIP Press, New York, 1996, ISBN1-56396-544-5, pp.173-198.

［cavity内の異常な交換関係とその意味］

[8] "Anomalous commutation relation and spontaneous emission inside a microcavity," M. Ueda and N. Imoto, Phys. Rev. A50, p.89, (1994).

［場の交換関係は正常に戻る］

[9] "Field commutation relations in optical cavities," S.M. Barnett, C. R. Gilson, B. Huttner, and N. Imoto, Phys. Rev. Lett. 77, p.1739, (1996).